ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

ΕΡΜΗΝΕΙΕΣ ΕΚΦΡΑΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΛΟΓΙΚΗ
ΙΣΧΥΣ ΚΑΙ ΑΣΥΝΕΠΕΙΑ ΣΤΗΝ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΛΟΓΙΚΗ
ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΣΤΗΝ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΛΟΓΙΚΗ
ΛΟΓΙΚΕΣ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ ΜΕΣΩ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

ΕΡΜΗΝΕΙΕΣ ΕΚΦΡΑΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΚΑΤΗΓΟΡΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ
PRENEX ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΣΤΗΝ ΚΑΤΗΓΟΡΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΚΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ HERBRAND

ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ SKOLEM

ΤΟ ΣΥΜΠΑΝ ΤΟΥ HERBRAND (HERBRAND UNIVERSE) ΕΝΟΣ ΣΥΝΟΛΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΚΩΝ ΤΥΠΩΝ (CLAUSES)

SEMANTIC TREES

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ HERBRAND – μηχανική μέθοδος απόδειξης θεωρημάτων (~1930) (χρονοβόρα – απαιτεί Η/Υ)

Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ (RESOLUTION PRINCIPLE)

(Robinson 1965) – ένας και μόνο συλλογιστικός κανόνας –inference rule- για απόδειξη θεωρημάτων, χρήσιμος για Η/Υ

Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΚΑΙ ΕΝΟΠΟΙΗΣΗ

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΕΝΟΠΟΙΗΣΗΣ

Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΗΓΟΡΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

ΠΛΗΡΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΑΡΧΗΣ ΤΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΧΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΑΡΧΗΣ ΤΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΕΞΑΛΕΙΨΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

F1 : εάν έχει ζέστη και υγρασία, τότε θα βρέξει.
F2 : εάν έχει υγρασία, τότε έχει ζέστη.
F3 : τώρα έχει υγρασία.
Η ερώτηση είναι : Θα βρέξει ; (F4)

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ – ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

Έστω

P: «έχει ζέστη»
Q: «έχει υγρασία»
R: «θα βρέξει»

Και τα λογικά σύμβολα
« ^ » να αναπαριστά « και »
« $\rightarrow$ » να αναπαριστά « συνεπάγεται »

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Τότε τα παραπάνω τρία γεγονότα αναπαριστώνται ως :

$$F1 : P \wedge Q \rightarrow R$$
$$F2 : Q \rightarrow P$$
$$F3 : Q$$

οποτεδήποτε οι F1, F2 και F3 είναι αληθείς, ο τύπος F4 : R είναι αληθής

Γι' αυτό θα λέμε ότι το F4 επακολουθεί λογικά από τα F1, F2 και F3

(logically follows from)

Αυτό σημαίνει δηλαδή, ότι αν οι F1,F2,F3 είναι αληθείς, τότε θα βρέξει.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Παράδειγμα :

Έστω τα ακόλουθα γεγονότα :

F1 : Ο Κομφούκιος είναι ένας άνθρωπος

F2 : Κάθε άνθρωπος είναι θνητός

Αναπαράσταση των F1 και F2 με κατηγόρημα (predicate)

P(x) : «x είναι ένας άνθρωπος»

Q(x) : «ο x είναι θνητός»

$(\forall x)$ αναπαριστά το «για όλα τα x»

Τότε τα παραπάνω γεγονότα αναπαριστώνται από το κάτωθι :

F1 : P (Κομφούκιος)

F2 : $(\forall x) (P(x) \rightarrow Q(x))$

Από τα F1 και F2 μπορούμε να παράγουμε λογικά (logically deduce) το:

F3 : Q (Κομφούκιος)

δηλαδή ο Κομφούκιος είναι θνητός

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Τι προσπαθούμε να αποδείξουμε: Ότι ένας τύπος (formula) είναι λογικό επακόλουθο άλλων τύπων

Θα καλούμε μία κατάσταση κατά την οποία ένας τύπος είναι λογικό επακόλουθο άλλων, ως θεώρημα.

Μια επίδειξη του ότι ένα θεώρημα είναι αληθές θα καλείται απόδειξη του θεωρήματος.

Το πρόβλημα της σύγχρονης λογικής (MTP = Mechanical Theorem Proving) είναι να λάβει υπόψη "μηχανικές" μεθόδους, για να βρει αποδείξεις θεωρημάτων

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Σε ένα σύστημα ερωταποκρίσεων, τα γεγονότα μπορούν να αναπαρασταθούν από λογικούς τύπους. Τότε για να απαντηθεί μια ερώτηση από τα γεγονότα, αποδεικνύουμε ότι ένας τύπος που αντιστοιχεί στην απάντηση, παράγεται από τους τύπους που αναπαριστούν τα γεγονότα.

2. Σε ένα πρόβλημα ανάλυσης προγράμματος, μπορούμε να περιγράψουμε την εκτέλεση ενός προγράμματος μέσω ενός τύπου Α, και τη συνθήκη ότι το πρόγραμμα θα τερματιστεί, από έναν άλλο τύπο Β. Τότε για να επιβεβαιώσουμε το ότι το πρόγραμμα θα τερματιστεί, αρκεί ισοδύναμα να αποδείξουμε ότι ο τύπος Β ακολουθεί από τον τύπο Α.

Άλλα παρόμοια προβλήματα, που λύνονται με αντίστοιχη με την παραπάνω συλλογιστική, μέσα από τη θεωρία της Λογικής είναι :

- Το πρόβλημα ισομορφισμού γραφημάτων.
- Το πρόβλημα μετασχηματισμού καταστάσεων, κ.λ.π.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Βασικές μαθηματικές έννοιες και ορισμοί της θεωρίας συνόλων :

Ένα σύνολο (set) είναι μία συλλογή από στοιχεία (μέλη).

Ένα σύνολο που δεν περιέχει καθόλου στοιχεία καλείται κενό σύνολο $\varnothing$ (empty set).

Έστω δύο σύνολα, τα Α και Β. Η έκφραση $x \in A$ χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι το x είναι ένα μέλος του Α, ή ότι το x ανήκει στο Α.

Το σύνολο Α είναι ταυτόσημο ή ίσο (identical) με το σύνολο Β (συμβολίζεται με $A = B$), αν και μόνο αν το Α και το Β έχουν τα ίδια στοιχεία.

Το σύνολο Α είναι ένα υποσύνολο του συνόλου Β (συμβολίζεται με $A \subseteq B$), αν και μόνο αν κάθε στοιχείο του Α είναι στοιχείο του Β.

Το σύνολο Α είναι ένα κύριο υποσύνολο (proper subset) του συνόλου Β (συμβολίζεται $A \subset B$), αν και μόνο αν $A \subseteq B$ και $A \neq B$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Η <u>ένωση δύο συνόλων</u> (union) A και B, (συμβολίζεται $A \cup B$) είναι το σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία που ανήκουν στο A ή στο B.

Η <u>τομή δύο συνόλων</u> (intersection) A και B (συμβολίζεται $A \cap B$) είναι το σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία που από κοινού ανήκουν και στο A και στο B.

Η <u>διαφορά</u> μεταξύ δύο συνόλων A και B, (συμβολίζεται A-B), είναι το σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία που ανήκουν στο A, αλλά δεν ανήκουν στο B.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Σχέσεις και συναρτήσεις :

Ένα διατεταγμένο ζεύγος (ordered pair) στοιχείων, δηλώνεται με (x, y), όπου x καλείται πρώτη συντεταγμένη ή τετμημένη και y δεύτερη συντεταγμένη ή τεταγμένη (first & second coordinate).

Μία σχέση είναι ένα σύνολο από διατεταγμένα ζεύγη. Π.χ η σχέση ισότητας είναι ένα σύνολο από διατεταγμένα ζεύγη, καθένα από τα οποία έχει την πρώτη του συντεταγμένη ίση με τη δεύτερη.

Ο χώρος (domain) μιας σχέσης R είναι το σύνολο όλων των πρώτων συντεταγμένων των στοιχείων του R και το πλάτος στο οποίο κυμαίνεται (range), είναι το σύνολο όλων των δεύτερων συντεταγμένων.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Μία <u>συνάρτηση</u> είναι μια σχέση τέτοια ώστε δεν υπάρχουν δύο διαφορετικά στοιχεία που να έχουν την ίδια τετμημένη (πρώτη συντεταγμένη).

Εάν f είναι μία συνάρτηση και x είναι ένα στοιχείο του χώρου της, τότε ο συμβολισμός f(x) δηλώνει τη δεύτερη συντεταγμένη (τεταγμένη) του μοναδικού στοιχείου της f, του οποίου η πρώτη συντεταγμένη (τετμημένη) είναι x.

Η f(x) καλείται η τιμή της f στο σημείο x, και λέμε ότι η f προσδιορίζει (assigns) την τιμή f(x) στο x.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Συμβολισμοί Συσχέτισης

$>$: μεγαλύτερο από
$\geq$: μεγαλύτερο ή ίσο
$<$: μικρότερο από
$\leq$: μικρότερο ή ίσο
$=$: ίσο με
$\neq$: όχι ίσο με (διάφορο)
$\underline{\Delta}$: ορίζεται ως

Το σύμβολο « = » θα χρησιμοποιείται με πολλά παραπλήσια νοήματα όπως:

- « ορίζεται από » (is defined by)
- « είναι ταυτόσημο με » (is identical to)
- « είναι ισοδύναμο με » (is equivalent to)
- « είναι ίσο με » (is equal to)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Η συμβολική λογική λαμβάνει υπόψη γλώσσες των οποίων ο βασικός σκοπός είναι να συμβολίσουν συλλογισμό βασισμένο όχι μόνο σε μαθηματικά, αλλά επίσης και στην καθημερινή ζωή.

Η απλούστερη μορφή συμβολικής λογικής είναι η προτασιακή λογική (propositional logic or propositional calculus).

Στην προτασιακή λογική ενδιαφερόμαστε για δηλωτικές προτάσεις (declarative sentences) που μπορούν να είναι αληθείς (true), ή ψευδείς (false), αλλά όχι και τα δύο.

Κάθε τέτοια δηλωτική πρόταση καλείται πρόταση (proposition).

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Παραδείγματα προτάσεων είναι :

«Το χιόνι είναι άσπρο»
«Η ζάχαρη είναι υδατάνθρακας»
«Ο Βασίλης έχει διδακτορικό»

Η αλήθεια ή το ψεύδος που αποδίδεται σε μία πρόταση, καλείται η τιμή αλήθειας (truth value) της πρότασης.

Αναπαριστούμε

την αλήθεια (true) με T
το ψεύδος (false) με F

Επιπλέον θα δηλώνουμε με ένα γράμμα ή συνδυασμό γραμμάτων κάθε πρόταση όπως το παράδειγμα που ακολουθεί :

P $\underline{\Delta}$ Το χιόνι είναι άσπρο
Q $\underline{\Delta}$ Η ζάχαρη είναι υδατάνθρακας
R $\underline{\Delta}$ Ο Βασίλης έχει διδακτορικό

Τα σύμβολα όπως τα P, Q, R που χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν προτάσεις, καλούνται ατομικοί τύποι ή άτομα (atomic formulas or atoms).

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Από προτάσεις μπορούμε να δομήσουμε <u>σύνθετες προτάσεις</u> (compound propositions), χρησιμοποιώντας <u>λογικούς συνδέσμους</u> (logical connectives).

Παραδείγματα σύνθετων προτάσεων είναι :

« Το χιόνι είναι άσπρο και ο ουρανός καθαρός ».
« Αν ο Γιάννης δεν είναι στο σπίτι, τότε η Μαρία είναι στο σπίτι ».

λογικοί σύνδεσμοι στις παραπάνω δύο σύνθετες προτάσεις είναι
« και » και « εάν ... τότε »

Στην προτασιακή λογική θα χρησιμοποιήσουμε πέντε λογικούς συνδέσμους :

$\sim$ όχι (not): άρνηση
$\wedge$ και (and): σύζευξη
$\vee$ ή (or): διάζευξη
$\rightarrow$ εάν ... τότε (if ... then): συνεπαγωγή
$\rightarrow$ $\leftrightarrow$ εάν και μόνο εάν (if and only if): ισοδυναμία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Οι πέντε λογικοί σύνδεσμοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να δομήσουν σύνθετες προτάσεις, από απλές

π.χ. αναπαριστούμε τα :

« η υγρασία είναι υψηλή » με P
« η θερμοκρασία είναι υψηλή » με Q
« Κάποιος αισθάνεται άνετα » με C

Τότε η πρόταση : « Αν η υγρασία είναι υψηλή και η θερμοκρασία είναι υψηλή, τότε κάποιος δεν αισθάνεται άνετα », μπορεί να αναπαρασταθεί με :

$$((P \wedge Q) \rightarrow (\sim C))$$

Έτσι βλέπουμε ότι μια σύνθετη πρόταση μπορεί να εκφράσει, μία μάλλον πολύπλοκη ιδέα. Στην προτασιακή λογική, μία έκφραση που αναπαριστά μια πρόταση, όπως η P, ή μία σύνθετη πρόταση όπως η

$$((P \wedge Q) \rightarrow (\sim C))$$

καλείται καλοσχηματισμένη έκφραση (well - formed formula ή wff)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Ορισμός : Οι καλοσχηματισμένες εκφράσεις (wff) ή εκφράσεις για συντομία, στην προτασιακή λογική, ορίζονται επαναληπτικά όπως ακολουθεί :

Ένα άτομο είναι μια έκφραση (wff).
Αν G είναι μια έκφραση (wff) τότε (~ G) είναι επίσης μια έκφραση.
Αν G και H είναι εκφράσεις, τότε οι (G $\wedge$ H), (G $\vee$ H), (G $\rightarrow$ H) και (G $\leftrightarrow$ H) είναι εκφράσεις.
Όλες οι εκφράσεις δημιουργούνται μέσω εφαρμογής των ανωτέρω κανόνων.

Εκφράσεις όπως (P $\rightarrow$) και (P $\vee$) δεν είναι εκφράσεις (wff)

Μερικά ζεύγη παρενθέσεων μπορούν να απαλείφονται
π.χ.

P $\rightarrow$ Q	και	P $\vee$ Q	είναι αντίστοιχα οι εκφράσεις
(P $\rightarrow$ Q)	και	(P $\vee$ Q)	

Επιπλέον, μπορούμε να παραλείπουμε τη χρήση παρενθέσεων, εκχωρώντας φθίνουσα κατάταξη (decreasing ranks) στους προτασιακούς συνδέσμους όπως ακολουθεί :

$\leftrightarrow, \rightarrow, \wedge, \vee, \sim$

απαιτώντας ότι ο σύνδεσμος με τη μεγαλύτερη κατάταξη, πάντα φτάνει πιο μακριά.
Έτσι P $\rightarrow$ Q $\wedge$ R θα σημαίνει (P $\rightarrow$ (Q $\wedge$ R))
και P $\rightarrow$ Q $\wedge$ ~ R $\vee$ S θα σημαίνει (P $\rightarrow$ (Q $\wedge$ ((~ R) $\vee$ S))).

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Έστω G και H δύο εκφράσεις. Τότε οι αληθείς τιμές των εκφράσεων :

($\sim$ G), (G $\wedge$ H), (G $\vee$ H), (G $\rightarrow$ H) και (G $\leftrightarrow$ H) σχετίζονται με τις αληθείς τιμές των G και H κατά τον ακόλουθο τρόπο :

1. $\sim$ G είναι αληθής όταν G είναι ψευδής και είναι ψευδής όταν G είναι αληθής. Το ($\sim$ G) καλείται η άρνηση του G (negation)

2. (G $\wedge$ H) είναι αληθής αν G και H είναι και τα δύο αληθή. Αλλιώς η (G $\wedge$ H) είναι ψευδής. Πρόκειται για τη σύζευξη των G και H (conjunction)

3. (G $\vee$ H) είναι αληθής, αν τουλάχιστον ένα από τα G και H είναι αληθές. Αλλιώς η (G $\vee$ H) είναι ψευδής. Μιλάμε τότε για τη διάζευξη των G και H (disjunction).

4. (G $\rightarrow$ H) είναι ψευδής αν G είναι αληθής και H είναι ψευδής. Αλλιώς η (G $\rightarrow$ H) είναι αληθής. Η (G $\rightarrow$ H) διαβάζεται ως « εάν G, τότε H » ή «G συνεπάγεται H» (implication)

5. (G $\leftrightarrow$ H) είναι αληθής οποτεδήποτε οι G και H έχουν τις ίδιες τιμές αληθείας. Αλλιώς η (G $\leftrightarrow$ H) είναι ψευδής. Η (G $\leftrightarrow$ H) διαβάζεται ως “G αν και μόνο αν H“ (ισοδυναμία).

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

ΒΑΣΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΛΗΘΕΙΑΣ

G	H	$(\sim G)$	$(G \wedge H)$	$(G \vee H)$	$(G \rightarrow H)$	$(G \leftrightarrow H)$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

ΕΡΜΗΝΕΙΕΣ ΕΚΦΡΑΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Υποθέστε ότι P και Q είναι δύο άτομα και ότι οι τιμές αληθείας των P και Q είναι T και F, αντίστοιχα. Τότε σύμφωνα με τη δεύτερη γραμμή (Λ 120) του πίνακα (2.1), με P και Q να αντικαθιστώνται από τα G και H αντίστοιχα βρίσκουμε ότι οι τιμές αληθείας των (~ P), ($P \wedge Q$), ($P \vee Q$), ($P \rightarrow Q$) και ($P \leftrightarrow Q$) είναι F, F, T, F, F, αντίστοιχα. Παρόμοια, η τιμή αληθείας κάθε έκφρασης (wff), μπορεί να υπολογιστεί σε όρους τιμών αληθείας των ατόμων.

Παράδειγμα

Θεωρήστε την έκφραση

$$G \underline{\Delta} (P \wedge Q) \rightarrow (R \leftrightarrow (\sim S))$$

Τα άτομα στην έκφραση αυτή είναι P, Q, R και S.

Υποθέστε τις τιμές αληθείας αυτών να είναι T, F, T και T, αντίστοιχα.

Τότε :

* η ($P \wedge Q$) είναι F αφότου η G είναι ψευδής (F)
* η ($\sim S$) είναι F αφού η S είναι T
* η ($R \leftrightarrow (\sim S)$) είναι F αφού η R είναι T και η ($\sim S$) είναι F
* η ($P \wedge Q) \rightarrow (R \leftrightarrow (\sim S))$ είναι T αφού η ($P \wedge Q$) είναι F και η ($R \leftrightarrow (\sim S)$) είναι F

Άρα η έκφραση G είναι T (αληθής), εάν τα P, Q, R, S είναι T, F, T, T αντίστοιχα.

Η εκχώρηση των τιμών αληθείας στα { T, F, T, T } στα { P, Q, R, S } αντίστοιχα, θα καλείται μία ερμηνεία (interpretation) της έκφρασης G.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

- Από τη στιγμή που το καθένα από τα P, Q, R, S μπορεί να παίρνει είτε την τιμή T, είτε F, υπάρχουν $2^4 = 16$ ερμηνείες για την έκφραση G.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΛΗΘΕΙΑΣ ΤΗΣ $(P \wedge Q) \rightarrow (R \leftrightarrow (\sim S))$							
P	Q	R	S	$\sim S$	$(P \wedge Q)$	$(R \leftrightarrow (\sim S))$	$(P \wedge Q) \rightarrow (R \leftrightarrow (\sim S))$
T	T	T	T	F	T	F	F
T	T	T	F	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T	T	T
T	T	F	F	T	T	F	F
T	F	T	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	F	F	F	T
F	T	T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	T	F	F	T	F	F	T
F	F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	F	T	F	T	T
F	F	F	T	F	F	T	T
F	F	F	F	T	F	F	T

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Ορισμός

Δοθείσης μιας έκφρασης G ας είναι A1, A2, ..., An τα άτομα που συναντώνται στην έκφραση G. Τότε μία ερμηνεία του G είναι μια καταχώρηση των τιμών αληθείας στα A1, A2, ..., An στα οποία κάθε Ai παίρνει τιμή T ή F, αλλά όχι και τις δύο μαζί.

Ορισμός

Μια έκφραση G θα λέγεται αληθής υπό μία (ή σε μία) ερμηνεία [truth under (or in) an interpretation], αν και μόνο αν η G παίρνει την τιμή T στην ερμηνεία. Αλλιώς η G θα λέγεται ψευδής υπό την ερμηνεία αυτή. (false under the interpretation).

Εάν υπάρχουν « n » διαφορετικά άτομα σε μια έκφραση

τότε

Θα υπάρχουν 2^n διαφορετικές ερμηνείες για την έκφραση

Αν A1, A2, ..., An είναι όλα άτομα που συναντώνται σε μια έκφραση, ίσως είναι πιο βολικό να αναπαραστήσουμε μια ερμηνεία μέσω ενός συνόλου {m1...mn}, όπου mi είναι, ή A ή (~ A)

Π.χ.

το σύνολο { P, ~ Q, ~ R, S }, αναπαριστά μια ερμηνεία στην οποία P, Q, R και S έχουν αντίστοιχα τιμές T, F, T, T. Δηλαδή, αν ένα άτομο A είναι μέσα σε ένα σύνολο που αναπαριστά μια ερμηνεία, τότε το A παίρνει την τιμή T, ενώ να η άρνηση του ατόμου A είναι μέσα στο σύνολο, τότε το A παίρνει την τιμή F.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

ΙΣΧΥΣ ΚΑΙ ΑΣΥΝΕΠΕΙΑ ΣΤΗΝ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Παράδειγμα

Έστω η έκφραση G $\underline{\Delta}$ ((P → Q) ∧ P) → Q

Άτομα: P, Q

2^2 = 4 ερμηνείες

Η έκφραση G είναι αληθής για όλες τις ερμηνείες της ➔

ισχυρή έκφραση ή ταυτολογία (valid formula or tautology)

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΛΗΘΕΙΑΣ ΤΗΣ G $\underline{\Delta}$ ((P → Q) ∧ P) → Q

P	Q	(P → Q)	(P → Q) ∧ P	((P → Q) ∧ P) → Q
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Παράδειγμα Έστω η έκφραση $G \underline{\Delta} ((P \rightarrow Q) \wedge (P \wedge \sim Q))$.

Η G είναι ψευδής για όλες τις ερμηνείες της ➔

ασυνεπής έκφραση (inconsistent formula) ή αντιλογία (contradiction)

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΛΗΘΕΙΑΣ ΤΗΣ $G \underline{\Delta} ((P \rightarrow Q) \wedge (P \wedge \sim Q))$					
P	Q	$\sim Q$	$(P \rightarrow Q)$	$(P \wedge \sim Q)$	$((P \rightarrow Q) \wedge (P \wedge \sim Q))$
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	F

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Ορισμός

Μια έκφραση θα λέγεται ισχυρή (valid), αν και μόνο αν, είναι αληθής υπό όλες τις ερμηνείες της. Μια έκφραση θα λέγεται ανίσχυρη (invalid), αν και μόνο αν, δεν είναι ισχυρή.

Ορισμός

Μια έκφραση θα λέγεται ασυνεπής ή ανικανοποίητη (inconsistent or unsatisfiable), αν και μόνο αν είναι ψευδής υπό όλες τις ερμηνείες της. Μια έκφραση θα λέγεται συνεπής ή ικανοποιήσιμη, αν και μόνο αν δεν είναι ασυνεπής. Από τους πιο πάνω ορισμούς παρατηρούμε τα εξής :

1. Μια έκφραση είναι ισχυρή, αν και μόνο αν η άρνησή της είναι ασυνεπής.
2. Μια έκφραση είναι ασυνεπής, αν και μόνο αν η άρνησή της είναι ισχυρή.
3. Μια έκφραση είναι ανίσχυρη αν και μόνο αν υπάρχει τουλάχιστον μια ερμηνεία υπό την οποία η έκφραση είναι ψευδής.
4. Μια έκφραση είναι συνεπής, αν και μόνο αν υπάρχει τουλάχιστον μια ερμηνεία υπό την οποία η έκφραση είναι αληθής.
5. Εάν μια έκφραση είναι ισχυρή, τότε είναι συνεπής, αλλά όχι το αντίστροφο.
6. Εάν μια έκφραση είναι ασυνεπής, τότε είναι και ανίσχυρη, αλλά όχι το αντίστροφο.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Παράδειγμα

Χρησιμοποιώντας τεχνικές πινάκων αληθείας, θα μπορούσαμε να επιβεβαιώσουμε τα ακόλουθα:

α. ($P \wedge \sim P$) είναι ασυνεπής : άρα επίσης ανίσχυρη.
β. ($P \vee \sim P$) είναι ισχυρή : άρα επίσης συνεπής.
γ. ($P \rightarrow \sim P$) είναι ανίσχυρη : και ακόμα ασυνεπής.

Αν μια έκφραση F είναι αληθής υπό την ερμηνεία I, τότε λέμε ότι η I ικανοποιεί (satisfies) την F, ή ότι η F ικανοποιείται από την I.

Από την άλλη μεριά, αν μια έκφραση F είναι ψευδής υπό μια ερμηνεία I, τότε θα λέμε ότι η I διαψεύδει (είναι ενδεχόμενο να εμφανίζεται και με τον όρο « ψευτίζει » την F με την έννοια ότι « προσδίδει ψεύδος στην F » την F (falsifies F), ή ότι η F διαψεύδεται από την I

Π.χ. η έκφραση ($P \wedge (\sim Q)$) ικανοποιείται από την ερμηνεία { P, ~ Q } αλλά διαψεύδεται από την ερμηνεία { P, Q }. Όταν μια ερμηνεία I ικανοποιεί μια έκφραση F, η I επίσης καλείται, ένα μοντέλο (model) της F

Στην προτασιακή λογική αφότου ο αριθμός των ερμηνειών είναι πεπερασμένος, κάποιος μπορεί να αποφασίσει αν ή όχι μια έκφραση στην προτασιακή λογική είναι ισχυρή (ή ασυνεπής) μέσω εξαντλητικής εξέτασης όλων των πιθανών ερμηνειών της.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΣΤΗΝ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Συχνά είναι χρήσιμο ή αναγκαίο να μετασχηματίσουμε μια έκφραση από μια μορφή σε άλλη, ειδικά σε μια κανονική μορφή (normal form).

Αυτό γίνεται αντικαθιστώντας μικρότερες εκφράσεις με άλλες ισοδύναμες μέσα στη κύρια έκφραση επαναληπτικά ώσπου να πετύχουμε την επιθυμητή μορφή της.

Με τον όρο ισοδύναμες εννοούμε τα εξής :

Ορισμός

Δύο εκφράσεις F και G λέγονται ισοδύναμες (equivalent) - ή η F είναι ισοδύναμη της G - και δηλώνονται ως F = G, αν και μόνο αν οι τιμές αληθείας των F και G είναι οι ίδιες υπό κάθε ερμηνεία των F και G.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Παράδειγμα

Επιβεβαιώνουμε ότι το ($P \rightarrow Q$) είναι ισοδύναμο με το ($\sim P \vee Q$), εξετάζοντας τον πίνακα αληθείας :

P	Q	$(P \rightarrow Q)$	$(\sim P \vee Q)$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

ΚΑΝΟΝΕΣ 2.1-2.10

πάντα αληθής $\blacksquare$ πάντα ψευδής $\square$ F, G και H είναι όλες εκφράσεις

(2.1)	$F \leftrightarrow G = (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$	
(2.2)	$F \rightarrow G = \sim F \vee G$	
(2.3)	(a) $F \vee G = G \vee F$	(b) $F \wedge G = G \wedge F$
(2.4)	(a) $(F \vee G) \vee H = F \vee (G \vee H)$	(b) $(F \wedge G) \wedge H = F \wedge (G \wedge H)$
(2.5)	(a) $F \vee (G \wedge H) = (F \vee G) \wedge (F \vee H)$	(b) $F \wedge (G \vee H) = (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$
(2.6)	(a) $F \vee \square = F \square$	(b) $F \wedge \blacksquare = F \quad \blacksquare$
(2.7)	(a) $F \vee \blacksquare = \blacksquare \blacksquare \quad \blacksquare$	(b) $F \wedge \square = \square \square \quad \square$
(2.8)	(a) $F \vee \sim F = \blacksquare \quad \blacksquare$	(b) $F \wedge \sim F = \square \quad \square$
(2.9)	$\sim(\sim F) = F$	
(2.10)	(a) $\sim(F \vee G) = \sim F \wedge \sim G$;	(b) $\sim(F \wedge G) = \sim F \vee \sim G$

2.3a και 2.3b καλούνται συχνά <u>νόμοι μετατροπής</u> (commutative laws)
2.4a και 2.4b καλούνται <u>νόμοι σύνδεσης</u> (associative laws)
2.5a και 2.5b <u>νόμοι κατανομής</u> (distributive laws)
2.10a και 2.10b <u>νόμοι του De Morgan</u> (de Morgan laws)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Η $F1 \vee F2 \vee \ldots \vee Fn$ είναι αληθής οποτεδήποτε τουλάχιστον μία από τις Fi, $1 \leq i \leq n$ είναι αληθής, αλλιώς είναι ψευδής.

Η $F1 \vee F2 \vee \ldots \vee Fn$ καλείται η διάζευξη (disjunction) των F1, ..., Fn

$F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn$ αληθής, εάν όλες οι F1, ..., Fn είναι αληθής και η οποία είναι ψευδής αλλιώς.

Η $F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn$ καλείται η σύζευξη (conjunction) των F1, ..., Fn. Σημειώστε ότι η διάταξη στην οποία τα Fi εμφανίζονται σε μια σύζευξη, ή, διάζευξη, είναι άνευ σημασίας

Π.χ.

$F1 \vee F2 \vee F3 =$
$F1 \vee F3 \vee F2 =$
$F2 \vee F1 \vee F3 =$
$F3 \vee F2 \vee F1 =$
$F2 \vee F3 \vee F1 =$
$F3 \vee F1 \vee F2$

Ορισμός

Ένας στοιχειώδης τύπος (literal) είναι ένα άτομο ή η άρνηση ενός ατόμου.

Ορισμός

Μια έκφραση F λέγεται ότι είναι « σε μια συζευκτική κανονική μορφή » $F \underline{\Delta} F1 \wedge \ldots \wedge Fn$, $n \geq 1$, όπου κάθε ένα από τα F1, ..., Fn είναι μια διάζευξη από στοιχειώδεις τύπους.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Παράδειγμα

Έστω P, Q, R άτομα

Τότε $F \underline{\Delta} (P \vee \sim Q \vee R) \wedge (\sim P \vee Q)$ είναι μια έκφραση σε μια συζευκτική κανονική μορφή.

Για αυτή την έκφραση, $F1 = (P \vee \sim Q \vee R)$ και $F2 = (\sim P \vee Q)$.

Η F1 είναι μια διάζευξη των στοιχειωδών τύπων ~ P και Q.

Ορισμός

Μία έκφραση F λέγεται ότι είναι σε μια διαζευκτική κανονική μορφή (disjunctive normal form), αν και μόνο να η F έχει τη μορφή του

$F \underline{\Delta} F1 \vee ... \vee Fn$, $n \geq 1$, όπου καθένα από τα F1, ..., Fn

είναι μια σύζευξη από στοιχειώδεις τύπους.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Παράδειγμα

Έστω P, Q, R, άτομα. Τότε η F $\underline{\Delta}$ $(\sim P \wedge Q) \vee (P \wedge \sim Q \wedge \sim R)$ είναι μια έκφραση σε μια διαζευκτική κανονική μορφή.

$F1 = (\sim P \wedge Q)$
και
$F2 = (P \wedge \sim Q \wedge \sim R)$

Η F1 είναι μια σύζευξη των στοιχειωδών τύπων ~ P και Q και η F2 είναι μια σύζευξη των στοιχειωδών τύπων P, ~ Q, και ~ R.

Οποιαδήποτε έκφραση μπορεί να μετασχηματιστεί σε μια κανονική μορφή [νόμοι].

Διαδικασία μετασχηματισμού :

Βήμα 1
Χρησιμοποίησε τους νόμους 2.1 $(F \leftrightarrow G = (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F))$ και 2.2 $(F \rightarrow G = \sim F \vee G)$ για να εξαλειφθούν οι λογικοί σύνδεσμοι $\rightarrow$ και $\leftrightarrow$.
Βήμα 2
Επαναληπτική χρήση του νόμου 2.9 $(\sim (\sim F) = F)$ και των νόμων De Morgan, 2.10α $(\sim (F \vee G) = \sim F \wedge \sim G)$ και 2.10b $(\sim (F \wedge G) = \sim F \vee \sim G)$ για να φέρουμε τα αρνητικά σύμβολα αμέσως πριν τα άτομα.
Βήμα 3
Επαναληπτικά χρησιμοποίησε τους νόμους κατανομής
2.5a $(F \vee (G \wedge H) = (F \vee G) \wedge (F \vee H))$ και
2.5b $(F \wedge (G \vee H) = (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$ και τους άλλους νόμους για να επιτύχεις μια κανονική μορφή.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Παράδειγμα

Δημιουργήστε μια διαζευκτική κανονική μορφή για την έκφραση $(P \vee \sim Q) \to R$

Έχουμε $(P \vee \sim Q) \to R = \sim (P \vee \sim Q) \vee R$ (2.2)

$= (\sim P \wedge \sim (\sim Q)) \vee R$ (2.10a)

$= (\sim P \wedge Q) \vee R$ (2.9)

που είναι το ζητούμενο.

Παράδειγμα

Βρείτε μια συζευκτική κανονική μορφή για την έκφραση $(P \wedge (Q \to R)) \to S$

$(P \wedge (Q \to R)) \to S$

$= (P \wedge (\sim Q \vee R)) \to S$ (2.2)

$= \sim (P \wedge (\sim Q \vee R)) \vee S$ (2.2)

$= (\sim P \vee \sim (\sim Q \vee R)) \vee S$ (2.10b)

$= (\sim P \vee (\sim (\sim Q) \wedge \sim R)) \vee S$ (2.10a)

$= (\sim P \vee (Q \wedge \sim R)) \vee S$ (2.9)

$= ((\sim P \vee Q) \wedge (\sim P \vee \sim R)) \vee S$ (2.5a)

$= S \vee ((\sim P \vee Q) \wedge (\sim P \vee \sim R))$ (2.3a)

$= (S \vee (\sim P \vee Q)) \wedge (S \vee (\sim P \vee \sim R))$ (2.5a)

$= (S \vee \sim P \vee Q) \wedge (S \vee \sim P \vee \sim R)$ (2.4a)

άρα το $(S \vee \sim P \vee Q) \wedge (S \vee \sim P \vee \sim R)$ είναι το ζητούμενο

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

ΛΟΓΙΚΕΣ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ

Στα μαθηματικά, όπως και στην καθημερινή ζωή, συχνά πρέπει να αποφασίσουμε εάν κάποια κατάσταση είναι επακόλουθο κάποιων άλλων καταστάσεων

Αυτό οδηγεί στην έννοια της «λογικής συνέπειας»

Παράδειγμα

Έστω οι προτάσεις:

1) **οι τιμές των μετοχών υποχωρούν**, αν **το επιτόκιο καταθέσεων ανεβαίνει**

2) **οι περισσότεροι άνθρωποι είναι δυστυχείς** όταν οι τιμές μετοχών υποχωρούν

3) Υποθέστε ότι τώρα το επιτόκιο καταθέσεων πράγματι ανεβαίνει

Δείξτε ότι μπορείτε να συνάγετε το ότι οι άνθρωποι είναι δυστυχείς

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Για να δείξουμε το ζητούμενο, δηλώνουμε τις καταστάσεις ως ακολούθως :

$P \underline{\Delta}$ Το επιτόκιο καταθέσεων ανεβαίνει
$S \underline{\Delta}$ Οι τιμές μετοχών υποχωρούν
$U \underline{\Delta}$ Οι περισσότεροι άνθρωποι είναι δυστυχείς

Υπάρχουν 4 καταστάσεις στο παράδειγμά μας. Αυτές είναι :

(1) : Εάν το επιτόκιο καταθέσεων ανεβαίνει, οι τιμές μετοχών υποχωρούν.
(2) : Εάν οι τιμές μετοχών υποχωρούν, οι πιο πολλοί άνθρωποι είναι δυστυχείς
(3) : Το επιτόκιο καταθέσεων ανεβαίνει
(4) : Οι περισσότεροι άνθρωποι είναι δυστυχείς

Αυτές οι καταστάσεις, αρχικά συμβολίζονται ως :

(1') : $P \rightarrow S$
(2') : $S \rightarrow U$
(3') : P
(4') : U

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Τώρα δείχνουμε ότι (4') είναι αληθής, οποτεδήποτε η (1') $\wedge$ (2') $\wedge$ (3') είναι αληθής.

Μετασχηματίζουμε πρώτα την $((P \rightarrow S) \wedge (S \rightarrow U) \wedge P$
(αναπαριστώντας την (1') $\wedge$ (2') $\wedge$ (3') σε μια κανονική μορφή) :

$((P \rightarrow S) \wedge (S \rightarrow U) \wedge P)$
$((\sim P \vee S) \wedge (\sim S \vee U) \wedge P)$ (2.2)
$= P \wedge (\sim P \vee S) \wedge (\sim S \vee U)$ (2.3b)
$= ((P \wedge \sim P) \vee (P \wedge S)) \wedge (\sim S \vee U)$ (2.5b)
$= ((\square \vee (P \wedge S)) \wedge (\sim S \vee U))$ (2.8b)
$= (P \wedge S) \wedge (\sim S \vee U)$ (2.6a)
$= (P \wedge S \wedge \sim S) \vee (P \wedge S \wedge U)$ (2.5b)
$= (P \wedge \square) \vee (P \wedge S \wedge U)$ (2.8b)
$= \square \vee (P \wedge S \wedge U)$ (2.7b)
$= P \wedge S \wedge U$ (2.6a)

Έτσι εάν $((P \rightarrow S) \wedge (S \rightarrow U) \wedge P)$ είναι αληθής, τότε η $(P \wedge S \wedge U)$ είναι αληθής

Αφού η $(P \wedge S \wedge U)$ είναι αληθής μόνο εάν P, S και U είναι όλες αληθείς, συνάγουμε ότι η U είναι αληθής

Επειδή η U είναι αληθής οποτεδήποτε οι $(P \rightarrow S)$, $(S \rightarrow U)$ και P είναι αληθείς, στη λογική η U καλείται λογική συνέπεια των $(P \rightarrow S)$, $(S \rightarrow U)$ και P

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Ορισμός

Δοθέντων των εκφράσεων F1, F2, ...Fn και μιας έκφρασης G,

η G θα καλείται λογική συνέπεια (logical consequence) των F1, F2, ...Fn

[ή η G λογικά συνεπάγεται από τις F1, F2, ...Fn

(logically follows from F1, F2, ...Fn],

αν και μόνο αν, για κάθε ερμηνεία I, στην οποία η $F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn$ είναι αληθής, η G είναι επίσης αληθής

Οι F1, F2, ...Fn ονομάζονται αξιώματα (axioms) ή ακόμα υποθέσεις (premises) ή αυταπόδεικτα του G

Θεώρημα (2.1)

Δοθέντων των εκφράσεων F1, F2, ...Fn και μιας έκφρασης G,
η G είναι μια λογική συνέπεια των F1, F2, ...Fn αν και μόνο αν
η έκφραση $((F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn) \rightarrow G)$ είναι ισχυρή (valid)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Θεώρημα (2.2)

Δοθέντων των εκφράσεων F1, F2, ..., Fn και μιας έκφρασης G,
η G είναι λογική συνέπεια των F1, F2, ...Fn
αν και μόνο αν η έκφραση (F1 $\wedge$ F2 $\wedge$ ... $\wedge$ Fn $\wedge$ ~G) είναι ασυνεπής (inconsistent)

Τα δύο αυτά θεωρήματα είναι πολύ σημαντικά . Δείχνουν ότι αποδεικνύοντας πως μια συγκεκριμένη έκφραση είναι μια λογική συνέπεια ενός πεπερασμένου συνόλου εκφράσεων, είναι ισοδύναμο με το να αποδειχτεί ότι μια συγκεκριμένη συνολική έκφραση είναι ισχυρή ή ασυνεπής.

Εάν η G είναι μια λογική συνέπεια των F1, F2, ...Fn η έκφραση
((F1 $\wedge$ F2 $\wedge$...$\wedge$ Fn) $\rightarrow$ G) καλείται ένα θεώρημα (theorem) και η G επίσης καλείται το συμπέρασμα του θεωρήματος (conclusion of the theorem)

Στα μαθηματικά όπως επίσης και σε άλλες περιοχές, πολλά προβλήματα μπορούν να τυποποιηθούν ως προβλήματα απόδειξης θεωρημάτων

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Παράδειγμα

Θεωρήστε τις εκφράσεις : $F1 \; \underline{\Delta} \; (P \rightarrow Q)$
$F2 \; \underline{\Delta} \; \sim Q$
$G \; \underline{\Delta} \; \sim P$

Δείξτε ότι η G είναι μια λογική συνέπεια των F1 και F2 .

Μέθοδος 1

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την τεχνική των πινάκων αληθείας, για να δείξουμε ότι η G είναι αληθής, σε κάθε μοντέλο της $(P \rightarrow Q) \wedge \sim Q$.

Υπάρχει μόνο ένα μοντέλο για την $(P \rightarrow Q) \wedge \sim Q$, το $\{ \sim P , \sim Q \}$ (δηλαδή μόνο ένα ζεύγος τιμών αλήθειας που την επαληθεύει (T) – δείτε τελευταία γραμμή του πίνακα.

Η $\sim P$ είναι φυσικά αληθής στο μοντέλο αυτό.

Έτσι μέσω του ορισμού της λογικής συνέπειας, συμπεραίνουμε ότι η $\sim P$ είναι λογική συνέπεια των $(P \rightarrow Q)$ και $\sim Q$.

Πίνακας Αληθείας της $(P \rightarrow Q) \wedge \sim Q$ AND $\sim P$

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\sim Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge \sim Q$	$\sim P$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Μέθοδος 2

Χρησιμοποιούμε το θεώρημα 2.1.

Αυτό μπορεί να γίνει απλά επεκτείνοντας τον πίνακα αληθείας του πίνακα (2.7), ή υπολογίζοντας την έκφραση $((P \to Q) \wedge Q) \to \sim P$. Ο πίνακας (2.8) δείχνει ότι η

$((P \to Q) \wedge \sim Q) \to \sim P$ είναι αληθής για κάθε ερμηνεία.

Έτσι η $((P \to Q) \wedge \sim Q) \to \sim P$ είναι ισχυρή (valid) και σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1, η $\sim P$ είναι μια λογική συνέπεια των $P \to Q$ και $\sim Q$

Πίνακας αληθείας της $((P \to Q) \wedge \sim Q) \to \sim P$

P	Q	$P \to Q$	$\sim Q$	$(P \to Q) \wedge \sim Q$	$\sim P$	$((P \to Q) \wedge \sim Q) \to \sim P$
T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Μέθοδος 3

Μπορούμε επίσης να αποδείξουμε την ισχύ της $((P \to Q) \wedge \sim Q) \to \sim P$, μετασχηματίζοντας την σε μια συζευκτική κανονική μορφή:

$((P \to Q) \wedge \sim Q) \to \sim P$	
$= \ \sim((P \to Q) \wedge \sim Q) \vee \sim P$	(2.2)
$= \ \sim((\sim P \vee Q) \wedge \sim Q) \vee \sim P$	(2.2)
$= \ \sim((\sim P \wedge \sim Q) \vee (Q \wedge \sim Q)) \vee \sim P$	(2.5b)
$= \ \sim((\sim P \wedge \sim Q) \vee \square) \vee \sim P$	(2.8b)
$= \ \sim((\sim P \wedge \sim Q)) \vee \sim P$	(2.6a)
$= \ (P \vee Q) \vee \sim P$	(2.10b)
$= \ (Q \vee P) \vee \sim P$	(2.3a)
$= \ Q \vee (P \vee \sim P)$	
$= \ Q \vee \blacksquare$	
$= \ \blacksquare$	

Άρα η $((P \to Q) \wedge \sim Q) \to \sim P$ είναι ισχυρή

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Μέθοδος 4

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα (2.2)

Τότε αποδεικνύουμε ότι η
$((P \rightarrow Q) \wedge \sim Q) \wedge (\sim(\sim P)) = (P \rightarrow Q) \wedge \sim Q \wedge (\sim(\sim P))$ είναι ασυνεπής [IL126]

Πάλι όπως στη μέθοδο 2, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την τεχνική πίνακα αληθείας, για να δείξουμε ότι η $(P \rightarrow Q) \wedge \sim Q \wedge (\sim(\sim P))$ δηλ. η $(P \rightarrow Q) \wedge \sim Q \wedge P$ είναι ψευδής για κάθε ερμηνεία

Από τον πίνακα (2.9), συμπεραίνουμε ότι η $(P \rightarrow Q) \wedge \sim Q \wedge P$ είναι ασυνεπής και σύμφωνα με το θεώρημα (2.2), η $\sim P$ είναι μια λογική συνέπεια των $(P \rightarrow Q)$ και $\sim Q$.

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\sim Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge \sim Q \wedge P$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	F

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

5η μέθοδος

Μπορούμε επίσης να αποδείξουμε την ασυνέπεια της

$$(P \rightarrow Q) \wedge \sim Q \wedge P$$

μετασχηματίζοντας την σε μια διαζευκτική κανονική μορφή (disjunctive normal form):

$(P \rightarrow Q) \wedge \sim Q \wedge P =$	
$(\sim P \vee Q) \wedge (\sim Q \wedge P) =$	(2.2)
$(\sim P \wedge \sim Q \wedge P) \vee (Q \wedge \sim Q \wedge P) =$	(2.5b)
$(\square \wedge \sim Q) \vee (\square \wedge P) =$	(2.4) (2.7) (2.8)
$\square \vee \square =$	(2.8b)
$\square$	(2.6a)

Άρα η $(P \rightarrow Q) \wedge \sim Q \wedge P$ είναι ασυνεπής

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ ΜΕΣΩ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ

Παράδειγμα 1

Δοθέντος του γεγονότος ότι το κοινοβούλιο αρνείται να ψηφίσει νέους νόμους, τότε η απεργία δεν θα λήξει, εκτός αν διαρκέσει περισσότερο από ένα χρόνο και ο πρόεδρος παραιτηθεί. Δεν θα λήξει η απεργία διότι το κοινοβούλιο αρνείται να ενεργήσει και η απεργία μόλις αρχίζει .

α. Μετατροπή καταστάσεων σε σύμβολα :

P : Το κοινοβούλιο αρνείται να ενεργήσει

Q : Η απεργία έχει λήξει

R : Ο πρόεδρος παραιτείται

S : Η απεργία διαρκεί περισσότερο από ένα χρόνο

Τότε τα γεγονότα που δείχνονται στο παράδειγμα μπορούν να αναπαρασταθούν από « εκφράσεις » :

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

F1 : $(P \rightarrow (\sim Q \vee (R \wedge S)))$ $\underline{\Delta}$ εάν το κοινοβούλιο αρνηθεί να ψηφίσει νέους νόμους, τότε η απεργία δεν θα λήξει εκτός κι αν διαρκέσει περισσότερο από ένα χρόνο και ο πρόεδρος παραιτηθεί.

F2 : P $\underline{\Delta}$ Το κοινοβούλιο αρνείται να ενεργήσει.

F3 : $\sim S$ $\underline{\Delta}$ Η απεργία μόλις αρχίζει.

Από τα γεγονότα F1, F2, F3 συμπεραίνουμε ότι η απεργία δεν θα λήξει;

Δηλαδή μπορούμε να δείξουμε ότι η $\sim Q$ είναι μια λογική συνέπεια των F1, F2, F3 ;

Από το θεώρημα 2.1 αυτό είναι ισοδύναμο με το να δείξουμε ότι η

$$\mathbf{((P \rightarrow (\sim Q \vee (R \wedge S))) \wedge P \wedge \sim S \rightarrow \sim Q}$$

είναι μια ισχυρή έκφραση (valid formula)

Στον πίνακα 2.10 φαίνονται οι τιμές αληθείας της παραπάνω έκφρασης για όλες τις ερμηνείες

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

P	Q	R	S	F_1	F_2	F_3	$\sim Q$	$(F_1 \wedge F_2 \wedge F_3) \rightarrow \sim Q$
T	T	T	T	T	T	F	F	T
T	T	T	F	F	T	T	F	T
T	T	F	T	F	T	F	F	T
T	T	F	F	F	T	T	F	T
T	F	T	T	T	T	F	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	T	T	F	F	F	T
F	T	T	F	T	F	T	F	T
F	T	F	T	T	F	F	F	T
F	T	F	F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	F	T	T	T
F	F	F	T	T	F	F	T	T
F	F	F	F	T	F	T	T	T

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Από τον ίδιο πίνακα βλέπουμε ότι δεν υπάρχει ψευδής ερμηνεία.

Άρα η έκφρασή μας είναι μια ισχυρή έκφραση

Έτσι η ~ Q είναι μια λογική συνέπεια των

F1, F2 και F3

και μπορούμε να συνάγουμε την

~ Q από τις Fi

Άρα η απάντηση είναι : « η απεργία δεν θα λήξει »

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Παράδειγμα (Πρόβλημα Χημικής Σύνθεσης)

Υποθέστε ότι μπορούν να λάβουν χώρα οι ακόλουθες χημικές αντιδράσεις :

(1) : $MgO + H2 \rightarrow Mg + H_2O$
(2) : $C + CO_2 \rightarrow CO_2$
(3) : $CO_2 + H_2O \rightarrow H_2CO_3$

Υποθέστε ότι έχουμε μερικές ποσότητες MgO, H_2, O_2 και C σαν ατομικές εκφράσεις.

Τότε οι πιο πάνω χημικές αντιδράσεις μπορούν να αναπαρασταθούν από τις ακόλουθες εκφράσεις :

A1 : $(MgO \wedge H_2) \rightarrow (Mg \wedge H_2O)$
A2 : $(C \wedge O_2) \rightarrow CO_2$
A3 : $(CO_2 \wedge H_2O) \rightarrow H_2CO_3$

Αφού έχουμε MgO, H_2, O_2 και C, αυτά τα γεγονότα μπορούν να αναπαρασταθούν από τις ακόλουθες εκφράσεις :

A4 : MgO
A5 : H_2
A6 : O_2
A7 : C

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Τώρα το πρόβλημα μπορεί να καταστρωθεί εκ νέου ως εξής :

Πρέπει να αποδείξουμε ότι το H_2CO_3 είναι μια λογική συνέπεια των Α1, ... Α7 που από το θεώρημα (2.2) είναι αλήθεια αν η (Α1 $\wedge$ ... $\wedge$ Α7) $\wedge$ ~ H2CO3 είναι <u>ασυνεπής</u>

Αποδεικνύουμε το τελευταίο, μετασχηματίζοντας την έκφραση : (Α1 $\wedge$ Α2 ... $\wedge$ Α7 $\wedge$ ~ H2CO3) σε μια διαζευκτική κανονική μορφή :

(Α1 $\wedge$ ... $\wedge$ Α7 $\wedge$ ~ H2CO3) =

$= ((MgO \wedge H_2) \rightarrow (MgO \wedge H_2O)) \wedge ((C \wedge O_2) \rightarrow CO_2) \wedge ((CO_2 \wedge H_2O) \rightarrow H_2CO_3) \wedge MgO \wedge H_2 \wedge C \wedge O_2 \wedge \sim H_2CO_3 =$

$= (\sim MgO \vee \sim H_2 \vee Mg) \wedge (\sim MgO \vee \sim H_2 \vee H_2O) \wedge (\sim C \vee \sim O_2 \vee CO_2) \wedge (\sim CO_2 \vee \sim H_2O \vee H_2CO_3) \wedge MgO \wedge H_2 \wedge C \wedge O_2 \wedge \sim H_2CO_3 =$

$= (\sim MgO \vee \sim H_2 \vee Mg) \wedge (\sim MgO \vee \sim H_2 \vee H_2O) \wedge MgO \wedge H_2 \wedge (\sim C \vee \sim O_2 \vee CO_2) \wedge C \wedge O_2 \wedge (\sim CO_2 \vee \sim H_2O \vee H_2CO_3) \wedge \sim H_2CO_3 \wedge MgO \wedge H_2 \wedge C \wedge O_2 \wedge \sim H_2CO_3 =$

= … =

$= Mg \wedge H_2O \wedge MgO \wedge H_2 \wedge CO_2 \wedge C \wedge O_2 \wedge (\sim CO_2 \vee \sim H_2O) \wedge \sim H_2CO_3 \wedge MgO \wedge H_2 \wedge C \wedge O_2 \wedge \sim H_2CO_3 =$

$= (\sim CO_2 \vee \sim H_2O) \wedge H_2O \wedge CO_2 \wedge Mg \wedge MgO \wedge H_2 \wedge C \wedge O_2 \wedge \sim H_2CO_3 =$

$= \square \wedge Mg \wedge MgO \wedge H_2 \wedge C \wedge O_2 \wedge \sim H_2CO_3 =$

$= \square$

Αφού η σημαίνει « πάντα ψευδής », η έκφραση (Α1 $\wedge$ ... $\wedge$ Α7 $\wedge$ ~ H2CO3) είναι ασυνεπής.
Άρα το H2CO3 είναι μια λογική συνέπεια των Α1, ... , Α7.
Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να φτιάξουμε H2CO3 από MgO, H2, O2 και C

Η παραπάνω διαδικασία καλείται <u>πολλαπλασιαστική μέθοδος</u> (multiplication method), γιατί η διαδικασία μετασχηματισμού είναι πολύ όμοια με τον πολλαπλασιασμό μιας αριθμητικής έκφρασης

Στην πράξη, πολύ συνθετότερα παραδείγματα όμοια με το τελευταίο, λύνονται από Η/Υ με κατάλληλα