ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

- **<u>ΚΑΤΗΓΟΡΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ</u>**

Στην προτασιακή λογική → atoms → formulas
«εκφράσεις» : πλήθος σύνθετων ιδεών
Atom: η δομή & σύνθεσή του είναι «κατασταλμένες» (suppressed)

Προβλήματα προτασιακής λογικής:
π.χ. Κάθε άνθρωπος είναι θνητός.
Αφού ο Κομφούκιος είναι ένας άνθρωπος, είναι θνητός.

Πρόκειται για διαισθητικά σωστό συλλογισμό

Ωστόσο αν P : Κάθε άνθρωπος είναι θνητός.
Q : Ο Κομφούκιος είναι ένας άνθρωπος.
R : Ο Κομφούκιος είναι θνητός.

η R δεν είναι λογική συνέπεια (logical consequence) των P και Q

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

➔ λογική των κατηγορημάτων ή κατηγορική λογική (first order logic)

➔ τρεις πιο λογικές αντιλήψεις (notions) από ότι η προτασιακή λογική:
- όροι (terms)
- κατηγορήματα (predicates)
- ποσοδείκτες (quantifiers)

➔ μεγάλο μέρος της μαθηματικής αλλά και καθημερινής γλώσσας μπορεί να συμβολοποιηθεί μέσω της κατηγορικής λογικής

➔ Δείτε σχετικά την έκδοση LOGICOMIX (Παπαδημητρίου – Δοξιάδης) για την ιστορία της εξέλιξης της λογικής και τη νέα εποχή των μαθηματικών του 20ου αιώνα

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Θέλουμε να αναπαραστήσουμε το **«x είναι μεγαλύτερο από 3»**
Ορίζουμε το κατηγόρημα **ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ (x, y)** να σημαίνει :
«το x είναι μεγαλύτερο από y»
Τότε η αρχική φράση γίνεται **ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ (x, 3)**
ΣΗΜ: ένα κατηγόρημα είναι μια σχέση

«Ο x αγαπά την y» : κατηγόρημα **ΑΓΑΠΑ (x, y)**
Τότε **«Ο Γιάννης αγαπά τη Μαρία»** γίνεται **ΑΓΑΠΑ (Γιάννης, Μαρία)**

Χρήση συμβόλων συναρτήσεων στην κατηγορική λογική:
ΣΥΝ (x, y) δηλώνει το «**x + y**»
ΠΑΤΕΡΑΣ (x) σημαίνει **«Ο πατέρας του x»**

«**x + 1 είναι μεγαλύτερο από x**» συμβολίζεται
ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ (ΣΥΝ (x, 1), x)
«Ο πατέρας του Γιάννη, αγαπά το Γιάννη»,
συμβολίζεται: **ΑΓΑΠΑ (ΠΑΤΕΡΑΣ (Γιάννης), Γιάννης)**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

κατηγορική λογική:

<u>άτομα</u> (atoms) ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ (x, 3),
ΑΓΑΠΑ (Γιάννης, Μαρία)
ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ (ΣΥΝ (x, 1), x)
ΑΓΑΠΑ (ΠΑΤΕΡΑΣ(Γιάννης), Γιάννης),

<u>κατηγορικά σύμβολα</u> ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ
ΑΓΑΠΑ (predicate symbols),

x είναι μια μεταβλητή (variable)
3, Γιάννης και Μαρία, <u>αυτόνομα σύμβολα</u> ή <u>σταθερές</u>
ΠΑΤΕΡΑΣ και ΣΥΝ: σύμβολα συναρτήσεων (function symbols)

4 τύποι συμβόλων για να δομήσουμε ένα άτομο :

i) <u>Αυτόνομα σύμβολα ή σταθερές</u> : ονόματα αντικειμένων όπως (Γιάννης, Μαρία, 3)
ii) <u>Σύμβολα Μεταβλητών</u> : γράμματα με, ή, χωρίς δείκτες
iii) <u>Σύμβολα Συναρτήσεων</u> : μικρά γράμματα f, g, h, ή συνδυασμοί χαρακτήρων ΠΑΤΕΡΑΣ ή ΣΥΝ
iv) <u>Σύμβολα κατηγορημάτων</u> : Αυτά είναι συνήθως κεφαλαία γράμματα όπως P, Q, R ... ή συνδυασμοί χαρακτήρων κεφαλαίων γραμμάτων όπως ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ και ΑΓΑΠΑ.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Κάθε σύμβολο συνάρτησης ή κατηγορήματος, παίρνει καθορισμένο αριθμό εικόνων

Αν ένα σύμβολο συνάρτησης, έστω f, παίρνει « n » εικόνες το σύμβολο f καλείται ένα <u>σύμβολο συνάρτησης n - θέσης</u> για κάθε τιμή του « n », μπορεί να ονομαστεί n - διάστατο (π.χ. μονοδιάστατο, ...) (« n » - place function symbol)

Αυτόνομο σύμβολο ή σταθερά: σύμβολο συνάρτησης που δεν έχει εικόνες (arguments)

Αν ένα κατηγορικό σύμβολο P παίρνει n-εικόνες το P καλείται <u>« n » θέσης κατηγορικό σύμβολο</u>
για κάθε τιμή του n μπορεί να ονομαστεί n-διάστατο (π.χ. μονοδιάστατο, ...)
(« n » - place predicate symbol)

ΠΑΤΕΡΑΣ: μιας θέσης συναρτησιακό σύμβολο
ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ και ΑΓΑΠΑ: δύο θέσεων κατηγορικά σύμβολα.

Μια συνάρτηση είναι μια <u>απεικόνιση</u> (mapping), που απεικονίζει ένα πρόσωπο ονομαζόμενο Γιάννης, σε ένα πρόσωπο που είναι « ο πατέρας του Γιάννη ».

ΠΑΤΕΡΑΣ (Γιάννης) αναπαριστά ένα πρόσωπο, ακόμα κι αν το όνομά του είναι άγνωστο

Καλούμε την « ΠΑΤΕΡΑΣ (Γιάννης) » έναν <u>όρο</u> (term) στην κατηγορική λογική

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

<u>Ορισμός</u>

Οι όροι (terms) ορίζονται επαναληπτικά όπως ακολουθεί :

i) Μία σταθερά είναι ένας όρος

ii) Μία μεταβλητή είναι ένας όρος

iii) Εάν f είναι ένα « n » - θέσης συναρτησιακό σύμβολο, και t1, ... tn είναι όροι, τότε η f (t1, ... tn) είναι ένας όρος

iv) Όλοι οι όροι παράγονται μέσω εφαρμογής των κανόνων i, ii, iii

<u>Παράδειγμα</u>

x και 1 είναι και τα δύο όροι

ΣΥΝ είναι «δύο θέσεων συναρτησιακό σύμβολο»

ΣΥΝ (x, 1) είναι ένας όρος, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό

ΣΥΝ (ΣΥΝ (x, 1), x) και ΠΑΤΕΡΑΣ (ΠΑΤΕΡΑΣ (Γιάννης)) είναι επίσης όροι

Ο πρώτος δηλώνει την (x + 1) + x και ο δεύτερος τον παππού του Γιάννη

<u>Κατηγόρημα</u>: είναι μια απεικόνιση, που απεικονίζει μια λίστα από σταθερές σε τιμή T ή F

ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ είναι ένα κατηγόρημα

ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ (5, 3) είναι T (δηλ. true : αληθές)

ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ (1, 3) είναι F (δηλ. false : ψευδές)

<u>Ορισμός</u> (Άτομο στην Κατηγορική Λογική)

Αν P είναι ένα « n - θέσης κατηγορικό σύμβολο » και t1, ... tn είναι όροι, τότε το P (t1, ... tn) είναι ένα <u>άτομο</u> (atom). Καμία άλλη έκφραση δεν μπορεί να θεωρηθεί άτομο.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Χρησιμοποιούμε τους ίδιους 5 λογικούς συνδέσμους με αυτούς της προτασιακής λογικής, για να δομήσουμε εκφράσεις

Επιπλέον, αφού έχουμε παρουσιάσει τις μεταβλητές, χρησιμοποιούμε δύο ειδικά σύμβολα τα $\forall$ και $\exists$ για να χαρακτηρίσουμε τις μεταβλητές.

Τα $\forall$ και $\exists$ καλούνται <u>καθολικός και υπαρξιακός ποσοδείκτης</u>, αντίστοιχα
(universal and existential quantifiers)

Εάν x είναι μια μεταβλητή τότε

($\forall$ x) διαβάζεται « για όλα τα x » ή « για κάθε x »,

($\exists$ x) διαβάζεται « υπάρχει ένα x », ή
« για μερικά x », ή
« για τουλάχιστον ένα x »

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

<u>Παράδειγμα</u>

Να συμβολοποιήσετε τις ακόλουθες προτάσεις :

(α) Κάθε λογικός αριθμός (rational) είναι ένας πραγματικός αριθμός.
(β) Υπάρχει ένας αριθμός που είναι πρώτος.
(γ) Για κάθε αριθμό x, υπάρχει ένας αριθμός y, τέτοιος ώστε x < y.

Δηλώνουμε με P (x) : το « x είναι ένας πρώτος αριθμός »
Q (x) : το « x είναι ένας λογικός αριθμός »
R (x) : το « x είναι ένας πραγματικός αριθμός »
και LESS (x, y) : το « x είναι μικρότερο από y »

Τότε οι προτάσεις δηλώνονται ως εξής :

(α') : $(\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))$
(β') : $(\exists x)\, P(x)$
(γ') : $(\forall x)(\exists y)\, \mathrm{LESS}(x, y)$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Οι (α'), (β'), (γ') καλούνται εκφράσεις (formulas)

Πριν ορίσουμε τις εκφράσεις, διαχωρίζουμε τις δεσμευμένες μεταβλητές από τις ελεύθερες μεταβλητές (bound and free variables)

Για το λόγο αυτό πρώτα ορίζουμε ως σκοπό (scope) εμφάνισης ενός ποσοδείκτη σε μια έκφραση, την έκφραση στην οποία ο ποσοδείκτης εφαρμόζεται.

Π.χ.
Σκοπός των $\exists$ και $\forall$ στην έκφραση $(\forall x) (\exists y)$ LESS (x, y) είναι ο LESS (x, y)

Σκοπός του ($\forall$) στην $(\forall x) (Q (x) \rightarrow R (x))$ είναι ο $(Q (x) \rightarrow R (x))$

Ορισμός

- Μια εμφάνιση μιας μεταβλητής σε μια έκφραση καλείται δεσμευμένη (bound) εάν και μόνο εάν η εμφάνιση (occurrence) είναι μέσα στο σκοπό ενός ποσοδείκτη που αναφέρεται στη μεταβλητή, ή είναι η εμφάνιση στον ποσοδείκτη αυτόν

- Μια εμφάνιση μιας μεταβλητής σε μια έκφραση είναι ελεύθερη (free), αν και μόνο αν, αυτή η εμφάνιση της μεταβλητής δεν είναι δεσμευμένη

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

<u>Ορισμός</u>

Μια μεταβλητή είναι <u>ελεύθερη</u> (free) σε μια έκφραση, αν τουλάχιστον μία εμφάνιση αυτής είναι ελεύθερη στην έκφραση

Μία μεταβλητή είναι <u>δεσμευμένη</u> (bound) σε μια έκφραση, αν τουλάχιστον μία εμφάνιση αυτής είναι δεσμευμένη

$(\forall x)\ P(x, y)$ η x είναι δεσμευμένη
η y, είναι ελεύθερη

μια μεταβλητή μπορεί να είναι και ελεύθερη και δεσμευμένη σε μια έκφραση

π.χ. : η y είναι και τα δύο στην έκφραση : $(\forall x)\ P(x, y) \wedge (\forall y)\ Q(y)$.

<u>Ορισμός</u>

Καλοσχηματισμένες εκφράσεις ή απλά εκφράσεις (well formed formulas or wff) στην κατηγορική λογική ορίζονται επαναληπτικά όπως ακολουθεί :

i) Ένα άτομο είναι μια έκφραση (Σημειώστε ότι ένα άτομο είναι μια συντομία για μια ατομική έκφραση).

ii) Εάν F και G είναι εκφράσεις, τότε $\sim(F)$, $(F \vee G)$, $(F \wedge G)$, $(F \rightarrow G)$ και $(F \leftrightarrow G)$ είναι εκφράσεις.

iii) Εάν F είναι μια έκφραση και x είναι μια ελεύθερη μεταβλητή στην F, τότε $(\forall x)\ F$ και $(\exists x)\ F$ είναι εκφράσεις.

iv) Οι εκφράσεις δημιουργούνται μόνο από ένα πεπερασμένο αριθμό εφαρμογών των (i), (ii) και (iii). Για λόγους παρόμοιους με αυτούς που αναφέρθηκαν στην προτασιακή λογική, είναι δυνατόν να απαλείφονται παρενθέσεις

Παρενθέσεις

$(\exists x)\ A \vee B$ ισχύει αντί του $(((\exists x)\ A) \vee (B))$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Παράδειγμα

Μεταφράστε σε έκφραση την εξής κατάσταση :

«Κάθε άνθρωπος είναι θνητός.
Ο Κομφούκιος ένας άνθρωπος.
Γι' αυτό ο Κομφούκιος είναι θνητός ».

Δηλώνοντας « x είναι ένας άνθρωπος » με ΑΝΘΡΩΠΟΣ (x), και « x είναι θνητός » με ΘΝΗΤΟΣ (x), το « κάθε άνθρωπος είναι θνητός », μπορεί να γίνει :

$$(\forall x) (\text{ΑΝΘΡΩΠΟΣ} (x) \rightarrow \text{ΘΝΗΤΟΣ} (x))$$

Το «Κομφούκιος είναι ένας άνθρωπος» με ΑΝΘΡΩΠΟΣ (Κομφούκιος)
και το « ο Κομφούκιος είναι θνητός » με ΘΝΗΤΟΣ (Κομφούκιος)

Η όλη κατάσταση τώρα αναπαρίσταται από τα ακόλουθα :

$(\forall x)$ (ΑΝΘΡΩΠΟΣ (x) $\rightarrow$ ΘΝΗΤΟΣ (x)) $\wedge$ ΑΝΘΡΩΠΟΣ (Κομφούκιος) $\rightarrow$ ΘΝΗΤΟΣ (Κομφούκιος)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

<u>Παράδειγμα</u>

Τα βασικά αξιώματα των φυσικών αριθμών είναι τα ακόλουθα :

A1 : Για κάθε αριθμό, υπάρχει ένας και μόνο ένας αμέσως διαδοχικός του (immediate successor)

A2 : Δεν υπάρχει αριθμός για τον οποίο το « 0 » είναι αμέσως διαδοχικός.

A3 : Για κάθε αριθμό άλλον εκτός του « 0 », υπάρχει ένας και μόνο ένας αμέσως διαδοχικός.

Έστω f (x) και g (x) αναπαραστούν τον αμέσως διαδοχικό και αμέσως προηγούμενο του x, αντίστοιχα. Έστω E (x, y) « το x είναι ίσο με το y ».

Τότε τα αξιώματα αναπαριστώνται από τις ακόλουθες εκφράσεις :

A1' : $(\forall x) [(\exists y) (E (y, f (x)) \wedge (\exists z) (E (z, f (x))] \rightarrow E (y, z)))$
A2' : $\sim ((\exists x) E (0, f (x)))$
A3' : $(\forall x) (\sim E (x, 0) \rightarrow [((\exists y) (E (y, g (x)) \wedge (\exists z) (E (z, g (x))] \rightarrow E (y, z)))))$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

ΕΡΜΗΝΕΙΕΣ ΕΚΦΡΑΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΚΑΤΗΓΟΡΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Στην προτασιακή λογική, μια ερμηνεία είναι μια καταχώρηση τιμών αληθείας σε άτομα (atoms). Στην κατηγορική λογική, αφού εμπλέκονται μεταβλητές, πρέπει να κάνουμε κάτι παραπάνω από πριν.

Για να ορίσουμε μία ερμηνεία για μια έκφραση στην κατηγορική λογική, πρέπει να καθορίσουμε δύο πράγματα, συγκεκριμένα, το χώρο και μία καταχώρηση σε σταθερές, συναρτησιακά σύμβολα και κατηγορικά σύμβολα που εμφανίζονται στην έκφραση.

Ορισμός

Μία ερμηνεία (interpretation) μιας έκφρασης F στην κατηγορική λογική, αποτελείται από ένα μη κενό χώρο D (non empty domain) και μια καταχώρηση τιμών (values) σε κάθε σταθερά, συναρτησιακό σύμβολο που, εμφανίζεται στην F, όπως ακολουθεί :

Σε κάθε σταθερά (constant) εκχωρούμε ένα στοιχείο (element) στο D.

Σε κάθε « n - θέσης συναρτησιακό σύμβολο », εκχωρούμε μία απεικόνιση από τον Dn στον D. (Σημειώστε ότι Dn = { (x1, ... xn) x1 $\in$ D, ... xn $\in$ D }).

Σε κάθε « n-θέσης κατηγορικό σύμβολο », εκχωρούμε μία απεικόνιση του Dn στο {T, F}.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Μερικές φορές, για να δώσουμε έμφαση στο χώρο D, μιλάμε περί μιας ερμηνείας της έκφρασης πάνω στο D (over D). Όταν υπολογίζουμε την τιμή αληθείας μιας έκφρασης σε μια ερμηνεία πάνω στο χώρο D,

το ($\forall$ x), θα ερμηνεύεται ως « για όλα τα στοιχεία x στο D » και

το ($\exists$ x) ως « υπάρχει ένα στοιχείο (element) στο D ».

Για κάθε ερμηνεία μιας έκφρασης πάνω στο χώρο D, η έκφραση μπορεί να υπολογιστεί ως T ή F, ανάλογα με τους ακόλουθους κανόνες :

Αν οι τιμές αληθείας των εκφράσεων G και H υπολογίζονται, τότε οι τιμές αληθείας των εκφράσεων ~ G, (G $\wedge$ H), (G $\vee$ H), (G $\rightarrow$ H) και (G $\leftrightarrow$ H) υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τον πίνακα (2.1) του προηγούμενου κεφαλαίου.

($\forall$ x) G υπολογίζεται ως T αν η τιμή αληθείας του G υπολογίζεται ως T για κάθε d μέσα στο D. Αλλιώς υπολογίζεται ως F.

($\exists$ x) G υπολογίζεται ως T, αν η τιμή αληθείας του G είναι T για τουλάχιστον ένα d στο D. Αλλιώς υπολογίζεται ως F.

Σημειώνουμε ότι καμιά έκφραση περιέχουσα ελεύθερες (**free**) μεταβλητές, δεν μπορεί να υπολογιστεί. Από εδώ και εξής θα θεωρούμε, είτε ότι δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές, είτε ότι τις χειριζόμαστε ως σταθερές.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω οι εκφράσεις ($\forall$ x) P (x) και ($\exists$ x) ~ P (x).
Έστω μια ερμηνεία όπως ακολουθεί : Domain D = { 1, 2 }
Εκχώρηση τιμών στο P : P (1) = T P (2) = F

Εύκολα επιβεβαιώνουμε ότι η ($\forall$ x) P (x) είναι F στην ερμηνεία αυτή, διότι η P (x) δεν είναι T και για x = 1 και για x = 2.
Από την άλλη αφού ~ P (2) είναι T στην ερμηνεία αυτή, η ($\exists$ x) ~ P (x) είναι T στην ερμηνεία αυτή.

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω η έκφραση ($\forall$ x) ($\exists$ y) P (x, y)
Ας ορίσουμε μια ερμηνεία όπως ακολουθεί :D = { 1, 2 } και
P (1, 1)=T P (1, 2)=F P (2, 1)=F P (2, 2)=T

Αν x = 1, βλέπουμε ότι υπάρχει ένα y, συγκεκριμένα το 1, τέτοιο ώστε το P (1, y) είναι T.

Αν x = 2, υπάρχει επίσης ένα y, το 2, τέτοιο ώστε το P (2, y) να είναι T. Γι’ αυτό στην παραπάνω ερμηνεία για κάθε x μέσα στο D υπάρχει ένα y τέτοιο ώστε το P (x, y) να είναι T. Αυτό σημαίνει ότι ($\forall$ x) ($\exists$ y) P (x, y) είναι T στην ερμηνεία αυτή.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Παράδειγμα

Έστω η έκφραση G : $(\forall x) (P (x) \rightarrow Q (f (x) , \alpha))$

Υπάρχουν μία σταθερά α, ένα « μιας θέσης συναρτησιακό σύμβολο f », ένα « μιας θέσης κατηγορικό σύμβολο P », και ένα « δύο θέσεων κατηγορικό σύμβολο Q », στην G.

Η ακόλουθη ερμηνεία I του G είναι :

Domain : D = { 1, 2 }

Εκχώρηση τιμών στο α : $\alpha=1$

Εκχώρηση τιμών στο f $f (2)=1$, $f (1)=2$

Εκχώρηση τιμών στα P και Q :

P (1)=F P (2)=T Q(1,1)=T Q (1, 2)=T Q (2, 1)=F Q (2, 2) =T

Εάν x = 1 τότε $P (x) \rightarrow Q (f (x) , \alpha) = P (1) \rightarrow Q (f (1) , \alpha) = P (1) \rightarrow Q (2, 1) = F \rightarrow F = T$

Εάν x = 2 τότε $P (x) \rightarrow Q (f (x) , \alpha) = P (2) \rightarrow Q (f (2) , \alpha) = P (2) \rightarrow Q (1, 1) = T \rightarrow T = T$

Αφού $P (x) \rightarrow Q (f (x) , \alpha)$ είναι αληθής για όλα τα στοιχεία x στο χώρο D, η έκφραση $(\forall x) (P (x) \rightarrow Q (f (x) , \alpha)$ είναι αληθής υπό την ερμηνεία I.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

<u>Παράδειγμα</u>

Υπολογίστε τις τιμές αληθείας των ακολούθων εκφράσεων υπό την ερμηνεία που δόθηκε στο προηγούμενο παράδειγμα.

(a) $(\exists x)(P(f(x)) \wedge Q(x, f(\alpha))))$

(b) $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x, \alpha))$

(c) $(\forall x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(x, y))$

Για το (a) :

Αν $x = 1$

$(P(f(x)) \wedge Q(x, f(\alpha))) = (P(f(1)) \wedge Q(1, f(\alpha))) =$

$= P(2) \wedge Q(1, f(1))) = P(2) \wedge Q(1, 2) = T \wedge T = T$

Αν $x = 2$

$(P(f(x)) \wedge Q(x, f(\alpha))) = (P(f(2)) \wedge Q(2, f(1))) =$

$= P(1) \wedge Q(2, 1)) = F \wedge F = F$

Από τη στιγμή που υπάρχει ένα στοιχείο στο χώρο D, το $x = 1$, τέτοιο ώστε η $(P(f(x)) \wedge Q(x, f(\alpha)))$ είναι αληθής, η αληθής τιμή της έκφρασης $(\exists x)(P(f(x)) \wedge Q(x, f(\alpha))))$ είναι αληθής υπό την ερμηνεία I.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Για το (b) :

Αν x = 1

$$P (x) \wedge Q (x, \alpha) = P (1) \wedge Q (1, 1) = F \wedge T = F$$

Αν x = 2

$$P (x) \wedge Q (x, \alpha) = P (2) \wedge Q (2, 1) = T \wedge F = F$$

Αφού δεν υπάρχει στοιχείο στο χώρο D, τέτοιο ώστε $P (x) \wedge Q (x, \alpha)$ να είναι αληθής, η έκφραση $(\exists x) (P (x) \wedge Q (x, \alpha))$ υπολογίζεται ως ψευδής από την ερμηνεία I

Για το (c) :

Αν x = 1 τότε $P (x) = P (1) = F$

Γι' αυτό $(P (x) \wedge Q (x, y)) = F$ για y = 1 και y = 2. Αφού υπάρχει ένα x, το x = 1, τέτοιο ώστε η $(\exists y) (P (x) \wedge Q (x, y))$ είναι ψευδής, η έκφραση $(\forall x) (\exists y) (P (x) \wedge Q (x, y))$ είναι ψευδής υπό την ερμηνεία I, δηλαδή η έκφραση ψευτίζεται (falsified) από την I.

Ορίζουμε τώρα τις έννοιες <u>ισχύς</u>, <u>ασυνέπεια</u> και <u>λογική συνέπεια</u>, όμοια με την προτασιακή λογική.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Ορισμός

Μία έκφραση Q είναι συνεπής (consistent or satisfiable) αν και μόνο αν υπάρχει μια ερμηνεία I, τέτοια ώστε το G υπολογίζεται ως T στην I. Αν μια έκφραση Q είναι T σε μια ερμηνεία I, λέμε ότι η I είναι ένα μοντέλο (model), της G και η I ικανοποιεί (satisfies) την G.

Ορισμός

Μία έκφραση G είναι ασυνεπής (inconsistent or unsatisfiable) αν και μόνο αν δεν υπάρχει ερμηνεία που να ικανοποιεί την G.

Ορισμός

Μία έκφραση G είναι ισχυρή (valid) αν και μόνο αν κάθε ερμηνεία της G ικανοποιεί την G.

Ορισμός

Μία έκφραση G είναι μία λογική συνέπεια (logical consequence) εκφράσεων F1, F2, ..., Fn αν και μόνο αν για κάθε ερμηνεία I: «αν η F1 ∧ ... ∧ Fn είναι αληθής στην I, η G είναι επίσης αληθής στην I».

Οι σχέσεις μεταξύ των παραπάνω όπως δόθηκαν και στα θεωρήματα 2.1 και 2.2, είναι αληθείς και για την κατηγορική λογική. Στην πραγματικότητα η κατηγορική λογική μπορεί να θεωρηθεί ως μια προέκταση (επέκταση) της προτασιακής λογικής.

Όταν μια έκφραση στην κατηγορική λογική δεν περιέχει μεταβλητές και ποσοδείκτες, μπορεί να αντιμετωπιστεί ως μια έκφραση της προτασιακής λογικής

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Παράδειγμα

Θεωρήστε τις εκφράσεις F1 : $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

F2 : $P(\alpha)$

Θα αποδείξουμε ότι η έκφραση $Q(\alpha)$ είναι μια λογική συνέπεια των F1 και F2 :

Θεωρούμε κάθε ερμηνεία I που ικανοποιεί την $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(\alpha)$

Φυσικά στην ερμηνεία αυτή η $P(\alpha)$ είναι T. Υποθέτουμε ότι η $Q(\alpha)$ δεν είναι T στην ερμηνεία αυτή.

Τότε η $\sim P(\alpha) \vee Q(\alpha)$, δηλαδή η $P(\alpha) \rightarrow Q(\alpha)$ είναι F στην I.

Αυτό σημαίνει ότι $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$ είναι F στην I, που είναι <u>αδύνατο</u>. Γι' αυτό η $Q(\alpha)$ πρέπει να είναι T σε κάθε ερμηνεία που ικανοποιεί την $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(\alpha)$.

Αυτό σημαίνει ότι η $Q(\alpha)$ είναι μια λογική συνέπεια των F1 και F2.

Στην κατηγορική λογική από τη στιγμή που υπάρχει άπειρος (infinite) αριθμός χώρων (domains) γενικά, υπάρχει και άπειρος αριθμός ερμηνειών για μια έκφραση.

Γι' αυτό αντίθετα με την προτασιακή λογική, δεν είναι δυνατό να καθορίσουμε μια ισχυρή ή ασυνεπή έκφραση, υπολογίζοντας την έκφραση κάτω από όλες τις πιθανές ερμηνείες.

Έτσι παρακάτω θα δώσουμε διαδικασίες που εξυπηρετούν αυτό το σκοπό.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

PRENEX (Δεσμευμένη Εμπρός) ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΣΤΗΝ ΚΑΤΗΓΟΡΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Επεκτείνοντας τα δύο είδη κανονικών μορφών της προτασιακής λογικής, στην κατηγορική λογική έχουμε επίσης και την « prenex κανονική μορφή ». Επινοήθηκε για να απλουστεύσει τις διαδικασίες απόδειξης που συζητούνται παρακάτω.

Ορισμός

Μία έκφραση F στην κατηγορική λογική θα λέγεται ότι είναι σε « prenex κανονική μορφή », (prenex normal form), αν και μόνο αν η έκφραση F είναι της μορφής

$(Q_1\ x_1) \ldots (Q_n\ x_n)(M)$

όπου κάθε $(Q_i\ x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, είναι είτε το $(\forall x_i)$, είτε το $(\exists x_i)$

και M είναι μια έκφραση που δεν περιέχει ποσοδείκτες

Το Τμήμα $(Q_1\ x_1) \ldots (Q_n\ x_n)$ καλείται το πρόθεμα (prefix) και το M καλείται πίνακας (matrix) της έκφρασης F

Μερικά παραδείγματα prenex κανονικών μορφών:

$(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \wedge Q(y))$

$(\forall x)(\forall y)(\sim P(x, y) \rightarrow Q(y))$

$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(Q(x, y) \rightarrow R(z))$

Δοθείσης μιας έκφρασης, θεωρούμε τώρα μια μέθοδο μετασχηματισμού της σε prenex κανονική μορφή. Για να γίνει αυτό, πρέπει πρώτα να θεωρήσουμε μερικά βασικά ζεύγη ισοδυνάμων εκφράσεων στην κατηγορική λογική.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Δύο εκφράσεις F και G είναι ισοδύναμες (από πριν λέμε F = G) αν και μόνο αν οι τιμές αληθείας των F και G είναι ίδιες κάτω από κάθε ερμηνεία.

Τα βασικά ζεύγη ισοδυνάμων εκφράσεων που δίνονται στον πίνακα 2.6 του Κεφαλαίου 2, εξακολουθούν να είναι αληθή για την κατηγορική λογική.

Επιπλέον, υπάρχουν άλλα ζεύγη ισοδυνάμων εκφράσεων που περιέχουν ποσοδείκτες. Θεωρούμε τώρα αυτά τα επιπρόσθετα ζεύγη των ισοδυνάμων εκφράσεων.

Έστω μία έκφραση που περιέχει μία ελεύθερη μεταβλητή x. Για να τονίσουμε την ύπαρξη της ελεύθερης μεταβλητής x <u>μέσα στην F</u>, αναπαριστούμε την F με F [x].

Έστω G μία έκφραση που δεν περιέχει μεταβλητή x. Τότε έχουμε τα ακόλουθα ζεύγη ισοδυνάμων εκφράσεων, όπου Q είναι είτε $\forall$, είτε $\exists$. Για απλούστευση θα καλούμε κάθε ζεύγος από τα επόμενα, ως <u>νόμο</u> (law) :

(3.1a)$(Q x) F [x] \vee G = (Q x) (F [x] \vee G)$
(3.1b)$(Q x) F [x] \wedge G = (Q x) (F [x] \wedge G)$
(3.2a)$\sim ((\forall x) F [x]) = (\exists x) (\sim F [x])$
(3.2b)$\sim ((\exists x) F [x]) = (\forall x) (\sim F [x])$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Οι νόμοι (3.1a) και (3.1b) είναι προφανώς αληθείς, αφού το G δεν περιέχει x και γι' αυτό μπορεί να μεταφερθεί στο σκοπό (scope) του ποσοδείκτη Q

Οι νόμοι (3.2a) και (3.2b) αποδεικνύονται εύκολα

Υποθέστε ότι F [x] και H [x] είναι δύο εκφράσεις που περιέχουν το x

Υπάρχουν δύο άλλοι **νόμοι** :

(3.3a)$(\forall x) F [x] \wedge (\forall x) H [x] = (\forall x) (F [x] \wedge H [x])$
(3.3b)$(\exists x) F [x] \vee (\exists x) H [x] = (\exists x) (F [x] \vee H [x])$

Οι (3.3a) και (3.3b) σημαίνουν ότι ο καθολικός ποσοδείκτης $\forall$ και ο υπαρξιακός ποσοδείκτης $\exists$, μπορούν να διαχωριστούν πάνω σε $\wedge$ και $\vee$ αντίστοιχα, αλλά δεν μπορούν στο αντίστροφο, δηλαδή πάνω σε $\vee$ και $\wedge$, αντίστοιχα.

Δηλαδή :
$(\forall x) F [x] \vee (\forall x) H [x] \neq (\forall x) (F [x] \vee H [x])$
$(\exists x) F [x] \wedge (\exists x) H [x] \neq (\exists x) (F [x] \wedge H [x])$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Για περιπτώσεις όπως αυτές, πρέπει να κάνουμε κάτι ειδικό :

Αφού κάθε δεσμευμένη (bound) μεταβλητή σε μια έκφραση μπορεί να θεωρηθεί ως dummy μεταβλητή, κάθε δεσμευμένη μεταβλητή x, μπορεί να μετονομαστεί σε z, και η έκφραση $(\forall x) H [x]$ γίνεται $(\forall z) H [z]$,
δηλαδή $(\forall x) H [x] = (\forall z) H [z]$.

Έστω ότι διαλέγουμε την z που δεν εμφανίζεται στην $F [x]$. Τότε :

$(\forall x) F [x] \vee (\forall x) H [x] = (\forall x) F [x] \vee (\forall z) H [z] =$

(μετονομάζοντας όλα τα x που εμφανίζονται στην $(\forall x) H [x]$ σε z)

$= (\forall x) (\forall z) (F [x] \vee H [z])$ (από την 3.1a)

Παρόμοια έχουμε

$(\exists x) F [x] \wedge (\exists x) H [x] = (\exists x) F [x] \wedge (\exists z) H [z]) =$
(μετονομάζοντας όλα τα x που εμφανίζονται στην $(\exists x) H [x]$ σε z)
$= (\exists x) (\exists z) (F [x] \wedge H [z])$ (μέσω της 3.1b).

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Γι’ αυτό, και για τις δύο αυτές περιπτώσεις, μπορούμε να φέρουμε όλους τους ποσοδείκτες στα αριστερά της έκφρασης. Γενικά έχουμε:

(3.4a)(Q1 x) F [x] $\vee$ (Q2 x) H [x] = (Q1 x) (Q2 z) (F [x] $\vee$ H [z])
(3.4b)(Q3 x) F [x] $\wedge$ (Q4 x) H [x] = (Q3 x) (Q4 z) (F [x] $\wedge$ H [z])

όπου Q1, Q2, Q3 και Q4 είναι είτε $\forall$, είτε $\exists$ και z δεν εμφανίζεται στην F [x].

Φυσικά αν Q1 = Q2 = $\exists$ και Q3 = Q4 = $\forall$, τότε δεν χρειάζεται να μετονομάσουμε τα x στην

(Q2 x) H [x] ή (Q4 x) H [x].

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις 3.3 απευθείας.

Χρησιμοποιώντας τους νόμους 2.1 - 2.10 και 3.1 ως 3.4, <u>πάντοτε</u> μπορούμε να μετασχηματίσουμε μια δοθείσα έκφραση, σε prenex κανονική μορφή.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

<u>Μετασχηματισμός Εκφράσεων σε Prenex Κανονική Μορφή</u>

<u>Βήμα 1</u> :

Χρησιμοποιούμε τους νόμους 2.1 και 2.2 για να εξαλείψουμε τους λογικούς συνδέσμους $\leftrightarrow$ και $\rightarrow$

<u>Βήμα 2</u> :

Επαναληπτικά χρησιμοποιούμε το νόμο 2.9, τους νόμους του de Morgan (2.10) και τους νόμους 3.2a και 3.2b, για να μεταφέρουμε τα σύμβολα άρνησης αμέσως μπροστά από τα άτομα

<u>Βήμα 3</u> :

Μετονομάζουμε τις εξαρτημένες μεταβλητές αν αυτό κρίνεται αναγκαίο

<u>Βήμα 4</u> :

Χρησιμοποιούμε τους νόμους 3.1 και 3.3, 3.4, για να μετακινήσουμε τους ποσοδείκτες στα αριστερά της όλης έκφρασης και να επιτύχουμε τελικά μια <u>prenex κανονική μορφή</u>

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Παράδειγμα

Μετατρέψτε την έκφραση

$(\forall x) P (x) \rightarrow (\exists x) Q (x)$

σε μία prenex κανονική μορφή

$(\forall x) P (x) \rightarrow (\exists x) Q (x)$

$= \sim ((\forall x) P (x) \vee (\exists x) Q (x)$ από (2.2)

$= (\exists x) (\sim P (x)) \vee (\exists x) Q (x)$ από (3.2a)

$= (\exists x) (\sim P (x) \vee Q (x))$ από (3.3b)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Παράδειγμα

Αποκτήστε μια prenex κανονική μορφή για την έκφραση

$(\forall x)(\forall y)((\exists z)(P(x, z) \wedge (P(y, z)) \rightarrow (\exists u) Q(x, y, u))$

$(\forall x)(\forall y)((\exists z)(P(x, z) \wedge (P(y, z)) \rightarrow (\exists u) Q(x, y, u))$

$= (\forall x)(\forall y)(\sim((\exists z)(P(x, z) \wedge (P(y, z)) \vee (\exists u) Q(x, y, u))$ από (2.2)

$= (\forall x)(\forall y)((\forall z)(\sim P(x, z) \vee \sim P(y, z))) \vee (\exists u) Q(x, y, u))$ από (3.2b) (2.10b)

$= (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\sim P(x, z) \vee \sim P(y, z) \vee Q(x, y, u))$ από (3.1a)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

<u>ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΚΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ</u>

Έστω το παράδειγμα 3.3. Υπάρχουν δύο αξιώματα :

A1 : ($\forall$ x) (ΑΝΘΡΩΠΟΣ (x) $\rightarrow$ ΘΝΗΤΟΣ (x))

A2 : ΑΝΘΡΩΠΟΣ (Κομφούκιος)

Από τις Α1 και Α2 δείξτε ότι ο Κομφούκιος είναι θνητός. Δηλαδή ότι ΘΝΗΤΟΣ (Κομφούκιος) είναι μια λογική συνέπεια των Α1 και Α2

Έχουμε :

- A1 $\wedge$ A2 : ($\forall$ x) (ΑΝΘΡΩΠΟΣ (x) $\rightarrow$ ΘΝΗΤΟΣ (x)) $\wedge$ ΑΝΘΡΩΠΟΣ (Κομφούκιος)
- Αν η Α1 $\wedge$ Α2 είναι αληθής σε μια ερμηνεία Ι τότε και το Α1 και το Α2 είναι αληθή στο Ι.
- Αφού η (ΑΝΘΡΩΠΟΣ (x) $\rightarrow$ ΘΝΗΤΟΣ (x)) είναι αληθής για όλα τα x, όταν το x αντικαθίσταται από το « Κομφούκιος », η (ΑΝΘΡΩΠΟΣ (Κομφούκιος) $\rightarrow$ ΘΝΗΤΟΣ (Κομφούκιος)) είναι αληθής στο Ι.
- Δηλαδή η ~ ΑΝΘΡΩΠΟΣ (Κομφούκιος) $\vee$ ΘΝΗΤΟΣ (Κομφούκιος) είναι αληθής στο Ι.
- Πάντως η ~ ΑΝΘΡΩΠΟΣ (Κομφούκιος) είναι ψευδής στο Ι, αφού η ΑΝΘΡΩΠΟΣ (Κομφούκιος) είναι αληθής στο Ι.
- Άρα η ΘΝΗΤΟΣ (Κομφούκιος) πρέπει να είναι αληθής στο Ι.
- Έτσι έχουμε δείξει ότι η ΘΝΗΤΟΣ (Κομφούκιος) είναι αληθής στο Ι, οπότε η Α1 $\wedge$ Α2 είναι αληθής στη Ι.
- Εξ ορισμού, η ΘΝΗΤΟΣ (Κομφούκιος) είναι τότε λογική συνέπεια των Α1 και Α2.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Παράδειγμα

Κανένας έμπορος μεταχειρισμένων αυτοκινήτων δεν αγοράζει μεταχειρισμένο αυτοκίνητο για την οικογένειά του. Μερικοί άνθρωποι που αγοράζουν μεταχειρισμένα αυτοκίνητα για τις οικογένειές τους είναι εντελώς άτιμοι. Συμπεράνετε ότι μερικοί εντελώς άτιμοι άνθρωποι, δεν είναι έμποροι μεταχειρισμένων αυτοκινήτων.

Έστω U (x), B (x), D (x) να δηλώνουν « x είναι ένας έμπορος μεταχειρισμένων αυτοκινήτων », « x αγοράζει μεταχειρισμένο αυτοκίνητο για την οικογένειά του » και « x είναι εντελώς άτιμος » αντίστοιχα.

Τότε έχουμε :

$$A1 : (\forall x) (U (x) \rightarrow \sim B (x))$$

$$A2 : (\exists x) (B (x) \wedge D (x))$$

Έχουμε να δείξουμε ότι

$A3 : (\exists x) (D (x) \wedge \sim U (x))$ είναι μια λογική συνέπεια των A1 και A2.

Υποθέστε ότι A1 και A2 είναι αληθείς σε μια ερμηνεία I <u>πάνω</u> σε ένα χώρο D.

Αφού η A2 είναι αληθής στο I, υπάρχει ένα x στο D, έστω α τέτοιο ώστε η $B (\alpha) \wedge D (\alpha)$ να είναι αληθής στο I.

Γι’ αυτό η B (α) είναι αληθής στο I, δηλαδή η $\sim B (\alpha)$ είναι ψευδής στο I.

Η A1 μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη μορφή :

$$A1 : (\forall x) (\sim U (x) \vee \sim B (x))$$

Αφού η A1 είναι αληθής στο I και η $\sim B (\alpha)$ είναι ψευδής στο I, η $\sim U (\alpha)$ πρέπει να είναι αληθής στο I. Πάντως, αφού η $B (\alpha) \wedge D (\alpha)$ είναι αληθής στο I, η D (α) είναι αληθής στο I. Άρα η $D (\alpha) \wedge U (\alpha)$ είναι αληθής στο I. Έτσι η $A3 : (\exists x) (D (x) \wedge \sim U (x))$ είναι αληθής στο I. Άρα τελικά η A3 είναι μια λογική συνέπεια των A1 και A2.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Παράδειγμα

Μερικοί ασθενείς συμπαθούν όλους τους γιατρούς. Κανένας ασθενής δεν συμπαθεί τους κομπογιαννίτες. Γι' αυτό κανένας γιατρός δεν είναι κομπογιαννίτης.

Δηλώνουμε με :

$P(x)$: x είναι ασθενής

$D(x)$: x είναι γιατρός

$Q(x)$: x είναι κομπογιαννίτης

$L(x, y)$: ο x συμπαθεί τον y

Τότε τα γεγονότα και το συμπέρασμα, μπορούν να συμβολιστούν όπως ακολουθεί :

F1 : $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall y) D(x) \rightarrow L(x, y)))$

F2 : $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall y)(Q(y) \rightarrow \sim L(x, y)))$

G : $(\forall x)(D(x) \rightarrow \sim Q(x))$

Δείχνουμε τώρα ότι το G είναι μια λογική συνέπεια των F1 και F2 . Έστω I μια αυθαίρετη ερμηνεία (arbitrary), πάνω σε ένα χώρο D. Υποθέστε ότι F1 και F2 είναι αληθείς στο I. Αφού η F1 είναι αληθής στο I, υπάρχει κάποιο στοιχείο (element) έστω e, μέσα στο D, τέτοιο ώστε η

$$(P(e) \wedge (\forall y)(D\, y) \rightarrow L(e, y)))$$

να είναι αληθής στο I. Από την άλλη μεριά, αφού η

$$(P(x) \rightarrow (\forall y)(Q(y) \rightarrow \sim L(x, y)))$$

είναι αληθής στο I για όλα τα στοιχεία το x στο D, με βεβαιότητα η

$$(P(e) \rightarrow (\forall y)(Q(y) \rightarrow \sim L(e, y)))$$

είναι αληθής στο I. Αφού η P (e) είναι αληθής στο I, η

$$(\forall y)(Q(y) \rightarrow \sim L(e, y))$$

πρέπει να είναι αληθής στο I.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

- Ακόμα γνωρίζουμε ότι για κάθε στοιχείο y στο D, και το (D y) $\rightarrow$ L (e, y)) και το (Q (y) $\rightarrow$ ~ L (e, y)) είναι αληθή στο I.

- Αν το (D y) είναι ψευδές στο I, τότε το (D y) $\rightarrow$ ~ Q (y)) είναι αληθές στο I. Εάν το (D y) είναι αληθές στο I, τότε το L (e, y) πρέπει να είναι αληθές στο I, αφού το (D y) $\rightarrow$ L (e, y)) είναι αληθές στο I.

- Έτσι το Q (y) πρέπει να είναι ψευδές στο I, αφού το Q (y) $\rightarrow$ ~ L (e, y) είναι αληθές στο I. Συνεπώς η (D y) $\rightarrow$ ~ Q (y)) είναι αληθής στο I.

- Άρα η (D y) $\rightarrow$ ~ Q (y)) είναι αληθής για κάθε y στο D. Αυτό σημαίνει ότι η ($\forall$ y) (D y) $\rightarrow$ ~ Q (y)) είναι αληθής στο I.

- Άρα έχουμε δείξει, ότι αν οι F1 και F2 είναι αληθής στο I, η ($\forall$ y) (D y) $\rightarrow$ ~ Q (y)) είναι αληθής στο I. Αυτό δείχνει ότι η G είναι μια λογική συνέπεια των F1 και F2 .

- Κάθε διαδικασία κατά την οποία ένα συμπέρασμα προέρχεται από αξιώματα, ονομάζεται <u>απόδειξη</u> (proof).

- Η διαδικασία εύρεσης αποδείξεων καλείται <u>διαδικασία απόδειξης</u> (proof procedure).