Υβριδικοί Αλγόριθμοι προσομοιώσης μηχανισμών εξέλιξης και συμπεριφοράς φυσικών συστημάτων, για τη λήψη χρηματοοικονομικών αποφάσεων

Περίληψη

Οι υβριδικοί αλγόριθμοι αποτελούν αναβαθμισμένες τεχνικές, οι οποίες βασίζονται στο συνδυασμό στρατηγικών από διάφορες μεθοδολογίες. Οι μεθοδολογίες αυτές μπορεί να προέρχονται από το χώρο των μαθηματικών, της στατιστικής και της επιχειρησιακής έρευνας, όπως επίσης κι από την επιστήμη λήψης απόφασης (Τεχνητή Νοημοσύνη κ.α.). Οι υβριδικοί αλγόριθμοι χρακτηρίζονται από τη δυναμική τους, όσον αφορά την προσέγγιση κι επίλυση των προβλημάτων λήψης απόφασης. Στο χώρο των χρηματοοικονομικών, ένα σημαντικό πρόβλημα λήψης απόφασης είναι η βέλτιστη κατανομή κεφαλαίου σε δεδομένο αριθμό μετοχών.

Τυπικά, το πρόβλημα λήψης απόφασης αναφέρεται στην εύρεση του βέλτιστου συνδυασμού μετοχών, από ένα υπέρ-σύνολο διαθέσιμων μετοχών, όπως επίσης και στην επιλογή της βέλτιστης κατανομής κεφαλαίου σε καθεμία από αυτές τις μετοχές. Κατά τη διατύπωση του προβλήματος βελτιστοποίησης, στη διαχείριση χαρτοφυλακίου, θα πρέπει να οριστεί επακριβώς μια αντικειμενική συνάρτηση (επενδυτικός στόχος) και οι περιορισμοί της αγοράς. Στο παρόν κεφάλαιο, θα παρουσιαστεί η εφαρμογή ενός υβριδικού αλγορίθμου στο εν λόγω πρόβλημα λήψης απόφασης. Στόχος του κεφαλαίου είναι να γίνει περισσότερο κατανοητή η έννοια της διαδικασίας λήψης απόφασης στο πεδίο των χρηματοοικονομικών, καθώς επίσης και η λειτουργία και χρησιμότητα ενός υβριδικού αλγορίθμου.

Λέξεις – κλειδιά: υβριδικός αλγόριθμος, αλγόριθμος που βασίζεται στη συμπεριφορά μιας αποικίας μυρμηγκιών (ACO), αλγόριθμος που βασίζεται στη συμπεριφορά ενός σμήνους πυγολαμπίδων (FA), βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίου, αλγόριθμοι εμπνευσμένοι από τα φυσικά συστήματα

1. Εισαγωγή

Στη σύγχρονη εποχή, ένα πολύπλοκο ζήτημα στη διαδικασία λήψης απόφασης από τα στελέχη επενδύσεων, καθώς επίσης κι από τους μεμονωμένους επενδυτές, είναι η επιλογή της βέλτιστης επένδυσης. Ειδικότερα, στα πλαίσια της διαφοροποίησης του επενδυμένου κεφαλαίου, είναι πολύ συνήθης η πρακτική να κατασκευάζονται χαρτοφυλάκια μετοχών, δηλαδή συνδυασμοί μετοχών μιας αγοράς. Το πρόβλημα κατά τη διαδικασία αυτή είναι οι ολοένα και πιο απαιτητικοί επενδυτικοί στόχοι των επενδυτών, οι οποίοι σε συνδυασμό με τους αυστηρούς περιορισμούς της εκάστοτε αγοράς, δημιουργούν ένα δύσκολο πλαίσιο λήψης απόφασης (Markowitz, 1952). Επίσης, θα πρέπει να ληφθεί σοβαρά υπόψη ότι υπάρχουν πολλοί παράγοντες της αγοράς που επηρεάζουν την απόδοση και τη δομή ενός χαρτοφυλακίου μετοχών και οι οποίοι δε δύναται να συμπεριληφθούν συνολικά στα υποδείγματα λήψης απόφασης.

Το γενικό πλαίσιο στη διαχείριση χαρτοφυλακίου είναι το εξής: ο λήπτης απόφασης ενδιαφέρεται για την εύρεση του βέλτιστου συνδυασμού μετοχών, καθώς επίσης και των βέλτιστων ποσοστών επενδυμένου κεφαλαίου για κάθε μια από αυτές τις μετοχές. Επομένως, αυτό μπορεί να αποτελεί ένα διττό πρόβλημα βελτιστοποίησης, δηλαδή βελτιστοποίηση του συνδυασμού μετοχών (διακριτός χώρος λύσεων) και βελτιστοποίηση των ποσοστών επενδυμένου κεφαλαίου (συνεχής χώρος λύσεων) (Markowitz, 1952).

Μια κατηγορία αποτελεσματικών τεχνικών για την προσέγγιση του προβλήματος βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου προέρχεται από τον χώρο της Τεχνητής Νοημοσύνης, και ειδικότερα από τον τρόπο με τον οποίο λειτουργούν βιολογικά συστήματα και φυσικά δίκτυα (αλγόριθμοι που βασίζονται στον τρόπο συμπεριφοράς φυσικών συστημάτων – Nature Inspired Intelligence). Μερικά αντιπροσωπευτικά παραδείγματα τέτοιων αλγορίθμων είναι ο αλγόριθμος που βασίζεται στη στρατηγική αναζήτησης τροφής από μια αποικία μυρμηγκιών (Ant Colony Optimization) και ο αλγόριθμος που βασίζεται στη στρατηγική μετακίνησης κι επικοινωνίας ενός σμήνους πτηνών (Particle Swarm Optimization). Το βασικό πλεονέκτημα των αλγορίθμων που βασίζονται στα φυσικά συστήματα είναι η στρατηγική αναζήτησης τους. Τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των φυσικών συστημάτων αποτελούν ένα πολύ καλό παράδειγμα ολικής, κι όχι τοπικής, αναζήτησης στο χώρο λύσεων. Λαμβάνοντας υπόψη τη δυνατότητα συνδυασμού χαρακτηριστικών από δύο ή περισσότερους αλγορίθμους του συγκεκριμένου πεδίου (υβριδικά συστήματα), γίνεται αντιληπτό ότι υπάρχει μεγάλη πιθανότητα αναβάθμισης της στρατηγικής αναζήτησης της βέλτιστης λύσης (Vassiliadis & Dounias, 2009).

Στόχος του παρόντος κειμένου είναι να καταδείξει τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά και τα πλεονεκτήματα, που μπορεί να υπάρχουν, ενός υβριδικού αλγορίθμου, ο οποίος συνδυάζει επιμέρους τεχνικές από το χώρο της τεχνητής νοημοσύνης. Ειδικότερα, οι αλγόριθμοι βασίζονται στον τρόπο λειτουργίας δύο φυσικών συστημάτων. Επίσης, ένας άλλος στόχος του κειμένου αυτού είναι να γίνει κατανοητός ο τρόπος με τον οποίο ένας υβριδικός αλγόριθμος μπορεί να προσεγγίσει το πρόβλημα βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου μετοχών.

2. Βιβλιογραφική επισκόπηση

Προτού προχωρήσουμε στην ανάλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης, καθώς επίσης και στην παρουσίαση του υβριδικού αλγορίθμου, κρίνεται σκόπιμο να παρατεθούν ορισμένες αντιπροσωπευτικές επιστημονικές έρευνες, οι οποίες αφορούν το συγκεκριμένο ζήτημα, δηλαδή την εφαρμογή υβριδικών αλγορίθμων στο πρόβλημα βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου (Πίνακας 1).

Συμπερασματικά, τα βασικά σημεία των ερευνών αυτών είναι:

- Οι αλγόριθμοι που βασίζονται στον τρόπο λειτουργίας των φυσικών συστημάτων δίνουν συστηματικά καλύτερες λύσεις συγκριτικά με παραδοσιακές προσεγγίσεις.
- Το βασικό μειονέκτημα των αλγορίθμων που βασίζονται στον τρόπο λειτουργίας των φυσικών συστημάτων είναι ότι απαιτούν περισσότερη υπολογιστική ισχύ, συγκριτικά με πιο απλές τεχνικές.
- Το πεδίο εφαρμογής αλγορίθμων τεχνητής νοημοσύνης στο πρόβλημα διαχείρισης χαρτοφυλακίου, και ειδικότερα η ανάπτυξη υβριδικών τεχνικών, είναι ιδιαίτερα ανοιχτό, προσφέροντας αρκετές προοπτικές.

Πίνακας 1. Ενδεικτικές έρευνες σχετικά με την εφαρμογή αλγορίθμων, οι οποίοι βασίζονται στη συμπεριφορά φυσικών συστημάτων, σε εναλλακτικές διατυπώσεις του προβλήματος διαχείρισης χαρτοφυλακίου

Παραπομπή	**Μεθοδολογία**	**Πρόβλημα βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου**
(Jeurissen, 2008),	Γενετικός Αλγόριθμος & Μέθοδος Τετραγωνικού Προγραμματισμού (υβριδικός αλγόριθμος)	Ελαχιστοποίηση της διακύμανσης του σφάλματος παρακολούθησης ενός χρηματιστηριακού δείκτη
(Ruiz & Suarez, 2008)	Εξελικτικός Αλγόριθμος & Μέθοδος Τετραγωνικού Προγραμματισμού (υβριδικός αλγόριθμος)	Ελαχιστοποίηση της διακύμανσης του σφάλματος παρακολούθησης ενός χρηματιστηριακού δείκτη
(Schaerf, 2002)	- Βηματική Αναρρίχηση - Προσομοιωμένη Ανόπτηση - Αναζήτηση Tabu	Ελαχιστοποίηση του κινδύνου του χαρτοφυλακίου
(Streichert, Ulmer, & Zell, 2003)	- Γενετικός Αλγόριθμος - Εξελικτικοί Αλγόριθμοι - Μιμητικοί Αλγόριθμοι	Ελαχιστοποίηση του κινδύνου του χαρτοφυλακίου
(Gomez, Flores, & Osorio, 2006)	Γενετικός Αλγόριθμος & Προσομοιωμένη Ανόπτηση (υβριδικός αλγόριθμος)	Ελαχιστοποίηση του κινδύνου του χαρτοφυλακίου με περιορισμό στην αναμενόμενη απόδοση
(Maringer, Small is beautiful.Diversification with a limited number of assets, 2006)	Αλγόριθμος που βασίζεται στη συμπεριφορά μιας αποικίας μυρμηγκιών	Μεγιστοποίηση του δείκτη Sharpe
(Chen, Zhang, Cai, & Xu, 2006)	Αλγόριθμος που βασίζεται στη συμπεριφορά ενός σμήνους πτηνών	Ελαχιστοποίηση του κινδύνου του χαρτοφυλακίου με περιορισμό στην αναμενόμενη απόδοση
(Thomaidis, Angelidis, Vassiliadis, & Dounias, 2007)	Αλγόριθμος που βασίζεται στη συμπεριφορά ενός σμήνους πτηνών	Μεγιστοποίηση της υπερβάλλουσας απόδοσης με περιορισμό στη διακύμανση του σφάλματος παρακολούθησης ενός χρηματιστηριακού δείκτη
(Vassiliadis, Thomaidis, & Dounias, Active portfolio management under a downside risk framework:comparison of a hybrid nature-inspired scheme, 2009)	Αλγόριθμος που βασίζεται στη συμπεριφορά μιας αποικίας μυρμηγκιών & Μέθοδος μη-γραμμικού προγραμματισμού (υβριδικός αλγόριθμος)	Ελαχιστοποίηση της πιθανότητας του σφάλματος παρακολούθησης να πέσει κάτω από δεδομένη τιμή

3. Χρηματοοικονομικό πρόβλημα λήψης απόφασης

Στο πρόβλημα διαχείρισης χαρτοφυλακίου μετοχών υπάρχουν διάφοροι επενδυτικοί στόχοι, οι οποίοι αντιστοιχούν σε προφίλ και στρατηγικές διαφορετικών επενδυτών. Για παράδειγμα, υπάρχει η στρατηγική κατασκευής ενός χαρτοφυλακίου μετοχών, η οποία στοχεύει στο να «κερδίζει» συστηματικά τις αποδόσεις ενός δείκτη αγοράς, σε μια δεδομένη χρονική περίοδο. Αυτή η στρατηγική ονομάζεται ενεργητική διαχείριση χαρτοφυλακίου κι αντιστοιχεί σε προφίλ επιθετικών επενδυτών. Από την άλλη, σε μια πιο συντηρητική προσέγγιση, ένας επενδυτής μπορεί να επιθυμεί την κατασκευή ενός χαρτοφυλακίου, με στόχο την παρακολούθηση της τάσης της αγοράς. Η αγορά αναπαρίσταται από τον ίδιο τον χρηματιστηριακό δείκτη. Έτσι, το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο, σε αυτήν την περίπτωση, αποτελείται από ένα υπό-σύνολο των μετοχών της αγοράς, ενώ παράλληλα «μιμείται» την τάση της. Αυτό ονομάζεται παθητική διαχείριση χαρτοφυλακίου (Jeurissen, 2008). Βέβαια, υπάρχει και η επιλογή επένδυσης σε όλα τα στοιχεία του δείκτη, αλλά κάτι τέτοιο είναι πρακτικά αδύνατο λόγω του μεγάλο κόστους συναλλαγών, καθώς επίσης και της δυσκολίας διαχείρισης ενός τόσο πολύπλοκου χαρτοφυλακίου.

Τις περισσότερες περιπτώσεις, το πρόβλημα βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου χαρακτηρίζεται ως NP-hard, δηλαδή για το συγκεκριμένο πρόβλημα βελτιστοποίησης δεν υπάρχει προσδιοριστικός αλγόριθμος, ο οποίος να βρίσκει την ακριβή λύση σε πολυωνυμικό χρόνο. Στο σημείο αυτό, κρίνεται σκόπιμο να παραθέσουμε ένα παράδειγμα, το οποίο τονίζει την ιδιαίτερη πολυπλοκότητα στο χώρο λύσεων, για το πρόβλημα βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου. Έστω ότι ένας δυνητικός επενδυτής ενδιαφέρεται για την εύρεση του βέλτιστου χαρτοφυλακίου 10 μετοχών σε μια αγορά με 100 διαθέσιμες μετοχές (π.χ. χρηματιστηριακός δείκτης FTSE100 – Ηνωμένο Βασίλειο). Ο αριθμός των συνολικών συνδυασμών 10-άδων μετοχών μπορεί να βρεθεί από τον ακόλουθο τύπο

$$\frac{n!}{(n-k)! * k!}$$

όπου,

n, είναι το σύνολο των διαθέσιμων μετοχών στην αγορά

k, το μέγεθος του χαρτοφυλακίου

Οπότε, στην περίπτωση μας, ο αριθμός των συνολικών χαρτοφυλακίων είναι $\frac{100!}{(90)!*10!} = 1{,}73 * 10^{13}$. Επίσης, θα πρέπει να τονιστεί ότι για κάθε χαρτοφυλάκιο, πρέπει να βρεθεί ο βέλτιστος συνδυασμός ποσοστών επενδυμένου κεφαλαίου (συνεχής χώρος λύσεων). Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι ο αριθμός των συνολικών συνδυασμών, όσον αφορά τα ποσοστά επενδυμένου κεφαλαίου για κάθε χαρτοφυλάκιο, τείνει στο άπειρο. Το παραπάνω παράδειγμα καταδεικνύει το πρόβλημα πολυπλοκότητας, κατά τη βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίου. Αλγόριθμοι αναλυτικής αναζήτησης αποτυγχάνουν να προσεγγίσουν την ακριβή λύση, με δεδομένη την υπολογιστική ισχύ (περιορισμός στο κόστος εξοπλισμού). Επίσης, παραδοσιακές τεχνικές από το χώρο των μαθηματικών και της επιχειρησιακής έρευνας, στην καλύτερη των περιπτώσεων, καταλήγουν σε τοπικά βέλτιστες λύσεις (Maringer, 2005).

Το πρόβλημα διαχείρισης χαρτοφυλακίου που θα χρησιμοποιήσουμε στην περίπτωση μας, αφορά ταυτόχρονα την ενεργητική και παθητική διαχείριση. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, οι δυο αυτές προσεγγίσεις αποτελούν στρατηγικές για διαφορετικά προφίλ επενδυτών. Έτσι, ο επενδυτικός στόχος του προβλήματος βελτιστοποίησης είναι η μεγιστοποίηση ενός χρηματοοικονομικού δείκτη, ο οποίος λαμβάνει υπόψη του την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου, όπως επίσης και τη διακύμανση των αρνητικών αποδόσεων. Ο δείκτης αυτός ονομάζεται Sortino (Kuhn, 2006). Επίσης, σε μορφή περιορισμού, ενσωματώνεται ο δεύτερος επενδυτικός στόχος, ο οποίος αναφέρεται στη διακύμανση του σφάλματος παρακολούθησης (παθητική διαχείριση). Πρακτικά, το σφάλμα παρακολούθησης ενός δείκτη αντιστοιχεί στη διαφορά των αποδόσεων του δείκτη και αυτών του χαρτοφυλακίου. Ο επενδυτής, στην περίπτωση μας, στοχεύει στη διατήρηση του της διακύμανσης του σφάλματος παρακολούθησης κάτω από ένα συγκεκριμένο όριο. Εν κατακλείδι, και προτού προβούμε στη μαθηματική διατύπωση του προβλήματος βελτιστοποίησης, μπορούμε να καταλήξουμε ότι αυτό αντιστοιχεί στο προφίλ ενός ενεργητικού επενδυτή (επιθετικού), καθότι επιθυμεί να μεγιστοποιήσει έναν χρηματοοικονομικό δείκτη απόδοσης, διατηρώντας βέβαια υπό έλεγχο τόσο τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου, όσο και την παρακολούθηση της τάσης της αγοράς. Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι ο επενδυτής διαθέτει τόσο στοιχεία ενεργητικής στρατηγικής, όσο και παθητικής. Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι ανάλογα με το προφίλ και τη στρατηγική επένδυσης του λήπτη απόφασης, μπορούν να κατασκευαστούν διάφορες διατυπώσεις του προβλήματος βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου.

Παρακάτω, παραθέτουμε τη μαθηματική διατύπωση του προβλήματος βελτιστοποίησης που χρησιμοποιήθηκε στο παράδειγμα μας

$$Maximize\ Sortino\ Ratio = \frac{E(r_P) - r_f}{\theta_0(r_P)} \qquad \textbf{(1)}$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \qquad \textbf{(2)}$$

$$0 \le w_i \le 1 \qquad \textbf{(1)}$$

$$N = 5 \qquad \textbf{(2)}$$

$$\sqrt{Var(r_P - r_B)} \le H \qquad \textbf{(3)}$$

όπου,

$E(r_P)$, είναι η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου

r_f, είναι η απόδοση του περιουσιακού στοιχείου χωρίς κίνδυνο

$\theta_0(r_P)$, είναι η διακύμανση των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου, οι οποίες βρίσκονται κάτω από ένα συγκεκριμένο όριο (π.χ. το 0)

$$\theta_0(r_P) = \sqrt{\int_{-\infty}^{r_f} (r_f - r_P)^2 * f(r_P) dr_P} \qquad \textbf{(4)}$$

w_i, είναι το ποσοστό του επενδυμένου κεφαλαίου στη μετοχή *i*

N, είναι ο μέγιστος αριθμός μετοχών στο χαρτοφυλάκιο

r_B, είναι οι αποδόσεις του χρηματιστηριακού δείκτη

H, είναι το ανώτατο όριο για τη διακύμανση του σφάλματος παρακολούθησης

$f(r_P)$, είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου

$$f(r_P) = \frac{e^{\frac{-(r_P - E(r_P))^2}{2*\sigma^2}}}{\sigma * \sqrt{2*\pi}}$$

Από τη μαθηματική διατύπωση του προβλήματος, μπορούμε να σταθούμε στα ακόλουθα βασικά σημεία:

- Όσον αφορά τους περιορισμούς, ο βασικότερος αφορά την επένδυση όλου του διαθέσιμου κεφαλαίου στις μετοχές του χαρτοφυλακίου. Επίσης, τα ποσοστά επενδυμένου κεφαλαίου είναι θετικά (αγορά μετοχών).
- Τόσο η αντικειμενική συνάρτηση, όσο και μερικοί περιορισμοί, είναι μη-γραμμικοί. Αυτό δυσκολεύει αρκετά τη διαδικασία εύρεσης της βέλτιστης λύσης.
- Οι μεταβλητές απόφασης στο πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι δυο: οι μετοχές που θα πρέπει να συμμετέχουν στο χαρτοφυλάκιο και τα ποσοστά επενδυμένου κεφαλαίου στις μετοχές αυτές

4. Μεθοδολογία επίλυσης προβλήματος βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου

Στη βιβλιογραφία έχουν προταθεί πολλές τεχνικές, οι οποίες στοχεύουν στην εύρεση του βέλτιστου χαρτοφυλακίου μετοχών σε ένα προκαθορισμένο σύνολο δεδομένων. Οι τεχνικές αυτές διαφοροποιούνται όσον αφορά την ιδιαίτερη στρατηγική που χρησιμοποιούν. Επίσης, όσο πιο απαιτητική είναι μια μαθηματική διατύπωση του προβλήματος χαρτοφυλακίου, τόσο περισσότερο είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθούν πιο σύνθετες τεχνικές.

Οι υβριδικοί αλγόριθμοι έχουν την ικανότητα να προσεγγίζουν προβλήματα βελτιστοποίησης, συνδυάζοντας χαρακτηριστικά στρατηγικών από επιμέρους τεχνικές ή συνδυάζοντας τεχνικές για να επιλύσουν επιμέρους τμήματα του προβλήματος. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, το πρόβλημα διαχείρισης χαρτοφυλακίου αποτελεί ένα διττό πρόβλημα βελτιστοποίησης: θα πρέπει να βρεθεί ο βέλτιστος συνδυασμός μετοχών στο χαρτοφυλάκιο, όπως επίσης και ο βέλτιστος συνδυασμός ποσοστών επενδυμένου κεφαλαίου για το χαρτοφυλάκιο αυτό. Στο παρόν παράδειγμα, παρουσιάζεται ένα υβριδικό σχήμα, το οποίο συνδυάζει δυο τεχνικές που βασίζονται στον τρόπο λειτουργίας φυσικών συστημάτων. Ειδικότερα, ο αλγόριθμος, ο οποίος βασίζεται στη συμπεριφορά μιας αποικίας μυρμηγκιών κατά την αναζήτηση τροφής, χρησιμοποιείται για την εύρεση του βέλτιστου συνδυασμού μετοχών, ενώ ο αλγόριθμος, ο οποίος βασίζεται στη στρατηγική μετακίνησης των πυγολαμπίδων στο χώρο, χρησιμοποιείται για να βρεθεί το βέλτιστο ποσοστό επενδυμένου κεφαλαίου για κάθε μετοχή του χαρτοφυλακίου. Παρακάτω, θα περιγράψουμε τη βασική λειτουργία των φυσικών συστημάτων.

Ο αλγόριθμος, ο οποίος βασίζεται στη λειτουργία μιας αποικίας μυρμηγκιών, προτάθηκε στις αρχές του 1990 (Dorigo & Stultze, 2004). Η λογική του προέρχεται από τη συμπεριφορά μιας αποικίας μυρμηγκιών κατά την αναζήτηση τροφής. Στη φύση, το κάθε μυρμήγκι ξεκινά την αναζήτηση τροφής, γύρω από τη φωλιά του, με τυχαίο τρόπο, λόγω του ότι δεν έχει κάποια γνώση του φυσικού περιβάλλοντος τη δεδομένη χρονική στιγμή. Στη συνέχεια, όταν βρει μια πηγή τροφής, παίρνει ένα ποσοστό αυτής και το μεταφέρει πίσω στη φωλιά. Κατά την επιστροφή του στη φωλιά, το κάθε μυρμήγκι αποθέτει στο έδαφος, ίχνη μιας χημικής ουσίας (φερομόνη), η εξαρτάται από την ποσότητα και την ποιότητα της τροφής. Δηλαδή, ανάλογα με την αξιολόγηση που πραγματοποιεί το κάθε μυρμήγκι, αποθέτει και μια συγκεκριμένη ποσότητα φερομόνης. Όταν επιστρέψουν όλα τα μυρμήγκια στη φωλιά, συγκρίνουν τις διαφορετικές πηγές τροφής. Την επόμενη φορά που θα βγουν για τροφή, ευνοείται αυτό το μονοπάτι, το οποίο έχει τη μεγαλύτερη φερομόνη κι οδηγεί στην καλύτερη πηγή τροφής, μέχρι εκείνη τη στιγμή. Σταδιακά, ολοένα και μεγαλύτερος αριθμός μυρμηγκιών θα ακολουθεί το μονοπάτι προς την καλύτερη πηγή τροφής, ενισχύοντάς το παράλληλα με περισσότερη φερομόνη.

Αυτός ο έμμεσος τρόπος επικοινωνίας μεταξύ των μυρμηγκιών ονομάζεται <u>στιγμεργία</u>. Επίσης, μια ακόμη λειτουργία του φυσικού συστήματος, που μόλις περιγράφηκε, είναι η εξάτμιση των ιχνών φερομόνης με το πέρασμα του χρόνου εξαιτίας διαφόρων παραγόντων (π.χ. βροχή). Με αυτόν τον τρόπο, τα μονοπάτια εκείνα τα οποία δεν έχουν μεγάλη ποσότητα ιχνών φερομόνης, εξαφανίζονται σταδιακά. Ο αλγόριθμός, ο οποίος βασίζεται στη λειτουργία μιας αποικίας μυρμηγκιών, χρησιμοποιείται για την εύρεση του βέλτιστου συνδυασμού μετοχών.

Από την άλλη, ο αλγόριθμος, ο οποίος στηρίζεται στη στρατηγική που χρησιμοποιούν οι πυγολαμπίδες για τη μετακίνηση τους στο χώρο, προτάθηκε το 2007 (Yang, 2008). Το φως που εκπέμπουν οι πυγολαμπίδες, είναι αποτέλεσμα μιας χημικής αντίδρασης κατά τη διάρκεια της οποίας η χημική ενέργεια μετατρέπεται σε φωτεινή ενέργεια (bioluminescence - βιοφωσφορισμός). Δυο πολύ σημαντικές λειτουργίες της χημικής αυτής αντίδρασης είναι:

- Να προσεγγίζει η πυγολαμπίδα το ταίρι της (επικοινωνία).
- Να προσελκύει ενδεχόμενα θύματά τους.

Η συχνότητα εκπομπής της φωτεινής ακτινοβολίας, η φωτεινότητα της πηγής φωτός και η χρονική διάρκεια της λάμψης αποτελούν μέρος του μηχανισμού που φέρνει κοντά πυγολαμπίδες διαφορετικού φύλου. Τα θηλυκά απαντούν στη λάμψη των αρσενικών, η οποία είναι σχεδόν μοναδική για κάθε είδος, ενώ σε κάποια είδη, οι θηλυκές πυγολαμπίδες μπορούν να μιμηθούν τον τρόπο με τον οποίο παράγουν τη λάμψη αρσενικές πυγολαμπίδες άλλων ειδών. Με αυτό τον τρόπο τις ξεγελούν και τελικά τις τρώνε, αφού πλησιάζουν τις θηλυκές νομίζοντας πως είναι του ίδιου είδους με αυτές. Η ένταση του φωτός I, σε μια συγκεκριμένη απόσταση r από την πηγή, είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης αυτής. Επιπλέον, ο αέρας απορροφά το φως το οποίο γίνεται ολοένα και πιο αδύναμο καθώς αυξάνεται η απόσταση. Ο συνδυασμός αυτών των δυο παραγόντων, κάνουν ορατές τις πυγολαμπίδες σε μια περιορισμένη απόσταση, συνήθως μερικές εκατοντάδες μέτρα τη νύχτα, πράγμα το οποίο είναι αρκετά καλό όσον αφορά την επικοινωνία των πυγολαμπίδων. Αυτή η λάμψη φωτός παίζει καταλυτικό ρόλο στη διαδικασία βελτιστοποίησης. Ο αλγόριθμος αυτός χρησιμοποιείται για τη βελτιστοποίηση του συνδυασμού ποσοστών επενδυμένου κεφαλαίου για το χαρτοφυλάκιο μετοχών.

Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε αναλυτικά την αντιστοιχία των μηχανισμών από τα φυσικά συστήματα με τους αλγόριθμους βελτιστοποίησης. Προκειμένου να μετατραπούν τα φυσικά βιολογικά μοντέλα σε τεχνητά «αλγοριθμικά», δηλαδή σε υπολογιστικά εργαλεία για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης, θα πρέπει να γίνουν ορισμένες παραδοχές, οι οποίες θα παρουσιαστούν παρακάτω.

4.1 Αλγόριθμος βελτιστοποίησης, ο οποίος βασίζεται στη συμπεριφορά μιας αποικίας μυρμηγκιών (ACO)

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, ο συγκεκριμένος αλγόριθμος αποτελεί το πρώτο βήμα στη διαδικασία βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου, καθώς αναζητεί συνδυασμούς μετοχών, με στόχο να εντοπίσει τον βέλτιστο. Τα «τεχνητά» μυρμήγκια αποτελούν μια απλοποίηση των πραγματικών μυρμηγκιών. Το κάθε «τεχνητό» μυρμήγκι αντιστοιχεί σε μια πιθανή λύση, δηλαδή σε ένα χαρτοφυλάκιο μετοχών.

Στο πρόβλημα βελτιστοποίησης του συνδυασμού μετοχών, ένα χαρτοφυλάκιο αντιστοιχεί σε μια λύση. Οι μετοχές του χαρτοφυλακίου μπορούν να νοηθούν ως συστατικά της λύσης. Μια ολοκληρωμένη λύση αντιστοιχεί σε μια πηγή τροφής, στον φυσικό κόσμο. Έτσι, το κάθε «τεχνητό» μυρμήγκι, κατά την αναζήτηση πηγών τροφής (χαρτοφυλακίων), πρακτικά τις κατασκευάζει, επιλέγοντας τα επιμέρους συστατικά της.

Το κύριο συστατικό ενός αλγορίθμου ACO είναι ένα παραμετροποιημένο πιθανοθεωρητικό μοντέλο, το οποίο ονομάζεται μοντέλο φερομόνης (*pheromone model)*. Το μοντέλο φερομόνης αποτελείται από ένα διάνυσμα παραμέτρων T (*pheromone trail parameters*). Οι παράμετροι αυτοί $Ti \in T$, οι οποίες συνήθως σχετίζονται με επιμέρους μέρη των λύσεων, παίρνουν τιμές ri (*pheromone values*). Οι τιμές της φερομόνης ενημερώνονται βάσει των λύσεων που παράγονται σε κάθε επανάληψη, καθώς επίσης και των προηγούμενων τιμών τους. Η ενημέρωση αυτή έχει στόχο να συγκεντρώσει την έρευνα σε περιοχές του διαστήματος που περιέχουν υψηλής ποιότητας λύσεις. Προπαντός, η ενίσχυση των στοιχείων των ποιοτικών λύσεων, είναι ένα σημαντικό συστατικό των αλγορίθμων ACO. Στο πρόβλημα βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου, ο πίνακας φερομόνης περιέχει την πληροφορία σχετικά με την «*δύναμη επιλογής*» μιας μετοχής j, δεδομένου ότι έχει επιλεχθεί μια μετοχή i.

Γενικά, με την προσέγγιση του ACO γίνεται προσπάθεια για την επίλυση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης, επαναλαμβάνοντας τα ακόλουθα 2 βήματα:

- Κατασκευάζονται υποψήφιες λύσεις χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο φερομόνης (pheromone model), που είναι, μια παραμετροποιημένη κατανομή πιθανότητας σε όλο το χώρο λύσεων.

- Οι υποψήφιες λύσεις χρησιμοποιούνται για να τροποποιήσουν τις τιμές της φερομόνης (pheromone values) με τέτοιο τρόπο ώστε οι περιοχές καλύτερων λύσεων να συγκεντρώνουν μεγαλύτερη πιθανότητα επιλογής σε μεταγενέστερες επαναλήψεις. Απώτερος στόχος είναι να εξασφαλιστούν υψηλής ποιότητας λύσεις.

Ο πίνακας 2 απεικονίζει έναν ενδεικτικό πίνακα φερομόνης για *n*-μετοχές. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι τα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα έχουν την τιμή 1, κάτι που υποδηλώνει ότι δεν τίθεται ζήτημα σύγκρισης ενός στοιχείου με τον εαυτό του. Όσον αφορά τα υπόλοιπα στοιχεία, οι τιμές της φερομόνης αντικατοπτρίζουν τη «*δύναμη*» ενός στοιχείου, με την προϋπόθεση ότι έχει επιλεχθεί κάποιο άλλο πριν. Έτσι, αν για παράδειγμα η πρώτη μετοχή του χαρτοφυλακίου είναι η «*Μετοχή 2*», τότε ο αλγόριθμος θα επιλέξει την επόμενη μετοχή με τη μεγαλύτερη τιμή φερομόνης.

	Μετοχή 1	**Μετοχή 2**	**Μετοχή 3**	**...**	**Μετοχή n**
Μετοχή 1	*1*	*pher(1,2)*	*pher(1,3)*	*...*	*pher(1,n)*
Μετοχή 2	*pher(2,1)*	*1*	*pher(2,3)*	*...*	*pher(2,n)*
Μετοχή 3	*pher(3,1)*	*pher(3,2)*	*1*	*...*	*pher(3,n)*
...	*...*	*...*	*...*	*1*	*...*
Μετοχή n	*pher(n,1)*	*pher(n,2)*	*pher(n,3)*	*...*	*1*

Πίνακας 2. Πίνακας φερομόνης για μετοχές

Χάριν απλούστευσης, το κάθε «τεχνητό» μυρμήγκι επιλέγει την πρώτη μετοχή του χαρτοφυλακίου με τυχαίο τρόπο. Για να επιλεγούν οι επόμενες μετοχές, χρησιμοποιείται ένας άλλος μηχανισμός ο οποίος υπολογίζει την πιθανότητα μετάβασης από την $1^{η}$ μετοχή στις υπόλοιπες, βάσει του πίνακα φερομόνης. Η πιθανότητα μετάβασης δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$p_{aj} = \begin{cases} \dfrac{\sum_{i \in \acute{P}_a} pher_{ij}}{\sum_{i \in \acute{P}_a,} \sum_{h \notin \acute{P}_\alpha} pher_{ih}} , \forall\, j \notin \acute{P}_\alpha \\ 0, \forall\, j \in \acute{P}_\alpha \end{cases}$$

<u>όπου:</u>

- $pher_{ij}$ είναι η ποσότητα της φερομόνης που βρίσκεται στα «τεχνητά» μονοπάτια που ενώνει τις μετοχές $i \in \acute{P}_a$ και j. Η πληροφορία αυτή έχει γενικό χαρακτήρα καθώς εκφράζει την τρέχουσα γνώση από την «εμπειρία» όλης της αποικίας.
- $pher_{ih}$ είναι η ποσότητα φερομόνης από τη μετοχή i του χαρτοφυλακίου προς τις μετοχές που δεν έχουν επιλεγεί ακόμα στο χαρτοφυλάκιο (συμπεριλαμβανομένου και του υποψήφιου στοιχείου – μετοχής j).
- $\acute{P}_a$ είναι το ημιτελές χαρτοφυλάκιο που επιλέγεται από το α μυρμήγκι.

Η επαναληπτική διαδικασία του υπολογισμού των πιθανοτήτων γίνεται για όλες τις υπόλοιπες μετοχές του χαρτοφυλακίου μας. Η διαδικασία αυτή ακολουθείται για όλα τα μέλη του πληθυσμού.

Ο αλγόριθμος, που βασίζεται στη συμπεριφορά μιας αποικίας μυρμηγκιών, έχει ακόμη μια σημαντική διαδικασία: την αναβάθμιση του πίνακα φερομόνης, η οποία βασίζεται σε 2 πράξεις:

1. Εξάτμιση σε όλα τα μονοπάτια.

$$pher_t = (1 - \rho) \times pher_{t-1}$$

<u>όπου:</u>

- $pher_t$, η τιμή της φερομόνης στην t επανάληψη.
- ρ, ο βαθμός εξάτμισης, ο οποίος παίρνει τιμές στο διάστημα (0,1).
- $pher_{t-1}$, η τιμή της φερομόνης στην τ-1 επανάληψη.

2. Ενημέρωση του πίνακα της φερομόνης ενός συγκεκριμένου ποσοστού μυρμηγκιών που βρίσκουν τις καλύτερες λύσεις σε κάθε επανάληψη (iteration-best solution).

$$pher_{update} = f(ob)$$

όπου: ob η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης

4.2 Αλγόριθμος βελτιστοποίησης, ο οποίος βασίζεται στη συμπεριφορά ενός σμήνους πυγολαμπίδων

Στη συνέχεια, θα αναλύσουμε τον αλγόριθμο με τον οποίο βρίσκουμε το ποσοστό επενδυμένου κεφαλαίου το οποίο αντιστοιχεί σε κάθε μετοχή του επιλεγμένου χαρτοφυλακίου. Πιο συγκεκριμένα, η μέθοδος αυτή βασίζεται στον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί και επικοινωνεί ένα σμήνος φυσικών πυγολαμπίδων.

Η αντιστοίχιση του φυσικού παραδείγματος με το αλγοριθμικό πλαίσιο ακολουθεί τους παρακάτω κανόνες:

- Η φωτεινότητα μιας πυγολαμπίδας επηρεάζεται ή καθορίζεται από το τοπίο της αντικειμενικής συνάρτησης. Έτσι, όταν έχουμε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, η φωτεινότητα μπορεί να είναι ανάλογη της τιμής που παίρνει η αντικειμενική συνάρτηση.
- Η κάθε πυγολαμπίδα αντιστοιχεί σε ένα συνδυασμό ποσοστών επενδυμένου κεφαλαίου, για δεδομένο χαρτοφυλάκιο. Πρακτικά, μιλώντας με όρους υβριδικού αλγορίθμου, σε κάθε «τεχνητό» μυρμήγκι αντιστοιχεί ένα πλήθος «τεχνητών» πυγολαμπίδων.

Πρώτο βήμα του αλγορίθμου είναι η αρχικοποίηση του πληθυσμού των λύσεων πριν εισέλθει στην πρώτη γενιά. Η αρχικοποίηση γίνεται με τυχαίο τρόπο, και για κάθε μέλος του πληθυσμού υπολογίζεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Μετά το πέρας της διαδικασίας αυτής, με έναν μηχανισμό μέσα στον αλγόριθμο (συμπεριλαμβάνονται όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί από όλα τα ζεύγη των πυγολαμπίδων), εξασφαλίζεται ότι κάθε πυγολαμπίδα θα είναι σε θέση να δει τις υπόλοιπες, έτσι ώστε να μην παραβλέπονται ενδεχόμενες ποιοτικές λύσεις. Έπειτα, για κάθε γενιά του πληθυσμού των λύσεων, καθορίζεται ο τρόπος με τον οποίο θα οδηγηθούν οι πυγολαμπίδες στην καλύτερη λύση. Πιο συγκεκριμένα, για να παρατηρηθεί εκτενώς η κίνηση της κάθε πυγολαμπίδας, πρέπει να αναλυθούν κάποιες παράμετροι από τις οποίες εξαρτάται η κίνηση της κάθε μιας.

Αρχικά, η απόσταση μεταξύ δύο πυγολαμπίδων *i, j* μπορεί να οριστεί ως εξής:

$$r_{ij} = \|x_i - x_j\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{d} (x_{i,k} - x_{j,k})^2}$$

<u>όπου:</u>

$x_{i,k}$ είναι η *k* διάσταση της χωρικής συντεταγμένης x_i, της *i* πυγολαμπίδας.

Ακόμη, το *b* είναι ο βαθμός προσέλκυσης μιας πυγολαμπίδας από μια άλλη καλύτερη. Το *b* λοιπόν, μπορεί να οριστεί ως εξής:

$$b = b_0 \times e^{-\gamma \times r^m}, \text{ (m≥1)}$$

Βέβαια, το *b* εξαρτάται από 3 παράγοντες, $b = f(b_0, r_{ij}, \gamma)$ οι οποίοι είναι η απόσταση μεταξύ των 2 πυγολαμπίδων όπως την ορίσαμε παραπάνω και από το μέσο μεταξύ των δυο αυτών πυγολαμπίδων. Το μέσο προσδιορίζεται από έναν συντελεστή απορρόφησης φωτός (*γ*), ο οποίος ορίζεται από τον χρήστη. Ειδικότερα, το $\gamma \in [0, \infty)$. Όσο το *γ* τείνει στο άπειρο*,* τόσο περισσότερο «θολό» είναι το μέσο ανάμεσα στις 2 πυγολαμπίδες. Όσο το *γ* τείνει στο μηδέν, η κάθε πυγολαμπίδα είναι ορατή από τις υπόλοιπες, ανεξάρτητα την απόσταση που έχουν μεταξύ τους. Τέλος, το *b* εξαρτάται κι από μια σταθερά b_0, η οποία συμβολίζει τον βαθμό προσέλκυσης από μια υποθετική πηγή φωτός και ορίζεται κι αυτό από τον χρήστη.

Η κίνηση, τώρα, μιας πυγολαμπίδας *i* προς μια άλλη, περισσότερο ελκυστική (φωτεινή) πυγολαμπίδα *j*, δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$x_i = x_i + b_0 \times e^{-\gamma \times r_{ij}^2} \times (x_j - x_i) + \alpha \times \left(rand - \frac{1}{2}\right)$$

όπου: rand, μια γεννήτρια τυχαίων αριθμών που ανήκουν στο διάστημα [0,1] και ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή.

Η παραπάνω διαδικασία πραγματοποιείται για όλο τον πληθυσμό των τεχνητών πυγολαμπίδων σε κάθε γενιά. Έπειτα, γίνεται μια ταξινόμηση των τιμών των αντικειμενικών συναρτήσεων από την καλύτερη στη χειρότερη έτσι ώστε να επιλεγεί η πυγολαμπίδα με την καλύτερη λύση. Στη συνέχεια, γίνεται η εύρεση των καλύτερων λύσεων, όσον αφορά του ποσοστού επενδυμένου κεφαλαίου και τις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης της εκάστοτε γενιάς.

4.3 Ψευδοκώδικας υβριδικού αλγορίθμου

```
ACO - 1st routine:
BEGIN
   Set parameters for ACO & Firefly algorithm;
   Initialize pheromone matrix;
   For i = 1: Generations
   For j = 1: Population
       Generate portfolios (combination of assets)*
     Find portfolio's weights and objective function (Firefly Algorithm)**
   End
     Evaluate solutions (find best-so-far solution)
   Pheromone Matrix Update***
   End
END
Generate portfolios (combination of assets)* - 1st sub-routine
BEGIN
   Find 1st asset in portfolio randomly
   For i = 1: cardinality-1
     Calculate Transition Probability for next asset
     End
END
```

```
Find portfolio's weights and objective function (Firefly Algorithm)** - 2nd sub-routine

BEGIN

    Generate initial population of fireflies x(i) (i=1,2,...,n) - (weights and objective function value) randomly

    Calculate light intensity I for each firefly (based on objective function value)

    Find pairs of fireflies

    For i = 1: Generations (termination condition:Generations)

    For j = 1:pairs of fireflies

        Calculate distance between pair of fireflies

      Calculate parameters b,g

      If I(1st firefly of pair) < I(2nd firefly of pair)

        Move 1st firefly towards 2nd (based on movement formula) - new weight

        Calculate objective function in new point

        Else

        Move 2nd firefly towards 1st (based on movement formula) - new weight

        Calculate objective function in new point

      End

    End

    Evaluate solutions (find best-so-far solution)

    End

END

Pheromone Matrix Update*** - 3rd sub - routine

BEGIN

    Apply pheromone evaporation to all arcs in pheromone matrix (pairs of assets)

    Update pheromone value for n% of best ants (portfolios) - based on update formula

END
```

5. Επίλογος – βασικά συμπεράσματα

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάστηκε ένα πρόβλημα λήψης απόφασης από το πεδίο των χρηματοοικονομικών, καθώς επίσης κι ένας τύπος αλγορίθμου ο οποίος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διαδικασία επίλυσης. Πιο συγκεκριμένα, το πρόβλημα που παρουσιάστηκε, αναφέρεται στη βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίου μετοχών, δηλαδή στην εύρεση του βέλτιστου συνδυασμού μετοχών και ποσοστών επενδυμένου κεφαλαίου. Μέσω της μαθηματικής διατύπωσης του προβλήματος βελτιστοποίησης, παρουσιάστηκε μια συνήθης μορφή της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιορισμών. Με αυτόν τον τρόπο, ο δυνητικός αναγνώστης έχει τη δυνατότητα να κατανοήσει βασικές έννοιες κι αρχές της διαχείρισης χαρτοφυλακίου. Επιπλέον, αναλύθηκαν, ως ένα σημείο, ζητήματα πολυπλοκότητας του προβλήματος βελτιστοποίησης, τα οποία και κατέδειξαν τις δυσκολίες για τη διαδικασία λήψης της βέλτιστης απόφασης. Όσον αφορά το μεθοδολογικό πλαίσιο, παρατέθηκαν αναλυτικά η έννοια και τα χαρακτηριστικά του υβριδικού αλγορίθμου, όπως επίσης και των τεχνικών, των οποίων η στρατηγική βασίζεται στον τρόπο συμπεριφοράς φυσικών συστημάτων. Στόχος του κεφαλαίου είναι να καταδείξει τα πλεονεκτήματα και την εφαρμοσιμότητα των τεχνικών αυτών σε προβλήματα λήψης απόφασης στον τομέα των χρηματοοικονομικών. Επίσης, μέσω της παρουσίασης ενός υβριδικού αλγορίθμου, μπορεί να γίνει περισσότερο κατανοητός ο τρόπος με τον οποίο προσεγγίζει μια τέτοια τεχνική ένα απαιτητικό πρόβλημα βελτιστοποίησης.

Από τη διατύπωση του προβλήματος βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου στο παράδειγμα μας, γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι ανάλογα με το προφίλ, ο κάθε επενδυτής μπορεί να ορίσει έναν δικό του επενδυτικό στόχο, όσο πολύπλοκος κι αν είναι. Εξάλλου, αυτός θα ανταποκρίνεται στις επενδυτικές ανάγκες αυτού του ατόμου. Απλά, θα πρέπει να ληφθεί σοβαρά υπόψη ότι όσο πιο πολύπλοκη είναι η διατύπωση του προβλήματος βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου, τόσο πιο δύσκολο είναι να βρεθεί η βέλτιστη λύση σε άμεσο χρονικό διάστημα. Σε τέτοιες περιπτώσεις, ευνοείται η χρήση υβριδικών τεχνικών, οι οποίες συνδυάζουν χαρακτηριστικά ευφυών αλγορίθμων που βασίζονται στη συμπεριφορά φυσικών συστημάτων.

Βιβλιογραφία

Chen, W., Zhang, R. T., Cai, Y. M., & Xu, F. S. (2006). Particle swarm optimization for constrained portfolio selection problems. *5th International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, (σσ. 2425-2429).

Dorigo, M., & Stultze, M. (2004). *Ant Colony Optimization.* The MIT Press.

Gomez, M. A., Flores, C. X., & Osorio, M. A. (2006). Hybrid search for cardinality constrained portfolio optimization. *GECCO*, (σσ. 1865-1866).

Jeurissen, R. V. (2008). Optimized Index Tracking using a Hybrid Genetic Algorithm. *IEEE Congress on Evolutionary Computation*, (σσ. 2327-2334).

Kuhn, J. (2006). *Optimal risk-return tradeoffs of commercial banks and the suitability of profitability measures for loan portfolios.* Berlin: Springer.

Maringer, D. (2005). *Portfolio Management with Heuristic Optimization.* Springer.

Maringer, D. (2006). *Small is beautiful.Diversification with a limited number of assets.* Center for Computational Finance and Economic Agents.

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance , 7* (1), 77-91.

Ruiz, R. T., & Suarez, A. (2008). A hybrid optimization approach to index tracking. *Annals of Operations Research , 166* (1), 57-71.

Schaerf, A. (2002). Local search techniques for constrained portfolio selection problems. *Computational Economics , 20* (3), 177-190.

Streichert, F., Ulmer, H., & Zell, A. (2003). Evolutionary algorithms and the cardinality constrained portfolio optimization problem. *International Conference on Operations Research*, (σσ. 253-260).

Thomaidis, N. S., Angelidis, T., Vassiliadis, V., & Dounias, G. (2007). *Active portfolio management with cardinality constraints:an application of particle swarm optimization.* New Mathematics and Natural Computation.

Vassiliadis, V., & Dounias, G. (2009). Nature-Inspired Intelligence: a review of selected methods and applications. *International Journal on Artificial Intelligence Tools , 18* (4), 487-516.

Vassiliadis, V., Thomaidis, N. S., & Dounias, G. (2009). Active portfolio management under a downside risk framework:comparison of a hybrid nature-inspired scheme. *Springer* , σσ. 702-712.

Yang, X. S. (2008). *Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms.* Luniver Press.