

Ασκήσεις Δένδρων Απόφασης για το μάθημα "Ανάλυση Αποφάσεων και Μηχανική των Γνώσεων"

ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

Υπό συνθήκη πιθανότητα (Bayes Rule)

Πολλές φορές κατά την επίλυση ενός δέντρου απόφασης, βρισκόμαστε αντιμέτωποι με δεσμευμένα γεγονότα (καταστάσεις). Δηλαδή, η πιθανότητα πραγματοποίηση ενός ενδεχομένου εξαρτάται σε κάποιο βαθμό από την πιθανότητα πραγματοποίησης ενός άλλου ενδεχομένου, το οποίο προηγείται χρονικά. Σε αυτήν την περίπτωση ο υπολογισμός των πιθανοτήτων γίνεται με τη βοήθεια του Κανόνα του Bayes. Πιο συγκεκριμένα:

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε 2 ενδεχόμενα, το A και το B. Μπορούμε να διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

- A και B να είναι ανεξάρτητα γεγονότα \rightarrow τότε $P(A | B) = P(A)$. Το $P(A | B)$ διαβάζεται η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A, δεδομένου ότι έχει πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο B
- Η πραγματοποίηση του A να εξαρτάται από την πραγματοποίηση του B
 $\rightarrow P(A | B) = [P(B | A) * P(A)] / P(B)$

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Έστω E_1 ένα ενδεχόμενο, $E_i, i = 2, 3, \dots$ τα συμπληρωματικά του E_1 , και A ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο, τότε:

$$P(A) = P(A | E_1) * P(E_1) + P(A | E_2) * P(E_2) + P(A | E_3) * P(E_3) + \dots$$

Έτσι, αν έχουμε A ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο και E_1, E_2, \dots αλληλοαποκλειόμενα, τότε:

Από τον κανόνα του Bayes, έχουμε:

$$P(E_1 | A) = [P(A | E_1) * P(E_1)] / P(A)$$

$$P(E_2 | A) = [P(A | E_2) * P(E_2)] / P(A)$$

.....

Και απο το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

$$P(A) = P(A | E_1) * P(E_1) + P(A | E_2) * P(E_2) + \dots$$

Τότε, αν συνδυάσουμε τα παραπάνω, ισχύει:

$$P(E_1 | A) = [P(A | E_1) * P(E_1)] / P(A | E_1) * P(E_1) + P(A | E_2) * P(E_2) + \dots$$

$$P(E_2 | A) = [P(A | E_2) * P(E_2)] / P(A | E_1) * P(E_1) + P(A | E_2) * P(E_2) + \dots$$

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ένας επενδυτής θέλει να επενδύσει 500000 € σε μετοχές για 3 μήνες. Στο τέλος της περιόδου οι μετοχές αυτές μπορεί να αξίζουν περισσότερο ή λιγότερο απο το αρχικό ποσό αγοράς τους. Υποθέστε οτι το ποσό αυτό είναι 10000 € (ποσό που θα χαθεί ή θα κερδηθεί). Ο επενδυτής έχει 3 εναλλακτικές αποφάσεις: α) την επένδυση σε μετοχές, β) την τοποθέτηση των χρημάτων σε τραπεζικό λογαριασμό, γ) την αγορά συμβουλής έναντι άγνωστου ποσού, έστω α απο κάποιο σύμβουλο επιχειρήσεων. Οι μετοχές εκτιμάται οτι θα αυξηθούν (κατά 10000 €) στο επόμενο τρίμηνο με πιθανότητα 60 %, ενώ θα μειωθούν (κατά 10000 €) με πιθανότητα 40 %. Ο σύμβουλος προβλέπει επιτυχώς την αύξηση μετοχών σε ποσοστό 80 %, ενώ προβλέπει επιτυχώς τη μείωση μετοχών κατά 70 %. Ποιά είναι η τελική απόφαση του επενδυτή και ποιά η αμοιβή (οριακή τιμή) του συμβούλου;

Λύση

Σαν πρώτο βήμα στην επίλυση του παραπάνω προβλήματος, καταγράφουμε τα δεδομένα μας:

Ορίζουμε:

d_1 , το ενδεχόμενο να αυξηθούν οι μετοχές. Άρα $P(d_1) = 0.6$

d_2 , το ενδεχόμενο να μειωθούν οι μετοχές. Άρα $P(d_2) = 0.4$

Επίσης, σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης, μπορούμε να εξάγουμε και τις ακόλουθες δεσμευμένες πιθανότητες:

- Η πιθανότητα να δώσει πρόβλεψη για αύξηση των μετοχών (x_1) δεδομένου οτι οι μετοχές όντως αυξήθηκαν (d_1) $\rightarrow P(x_1 | d_1) = 0.80$
(επιτυχημένη πρόβλεψη αύξησης)

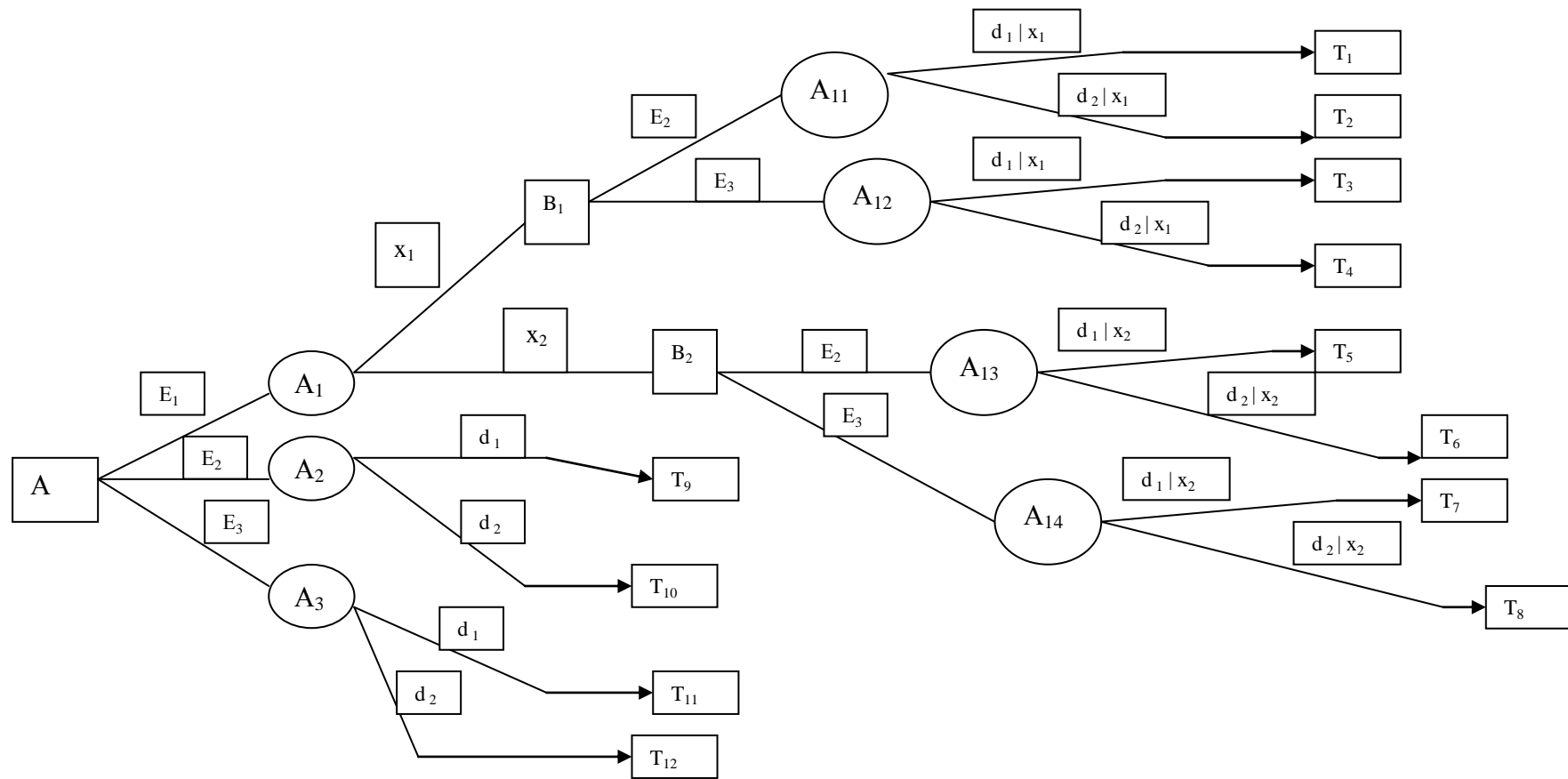
- Η πιθανότητα να δώσει πρόβλεψη για μείωση των μετοχών (x_2) δεδομένου ότι οι μετοχές όντως μειώθηκαν (d_2) $\rightarrow P(x_2/d_2) = 0.70$
(επιτυχημένη πρόβλεψη μείωσης)

Αυτές οι πληροφορίες θα μπορούσαν να έχουν βρεθεί από παρελθοντικές περιπτώσεις, όπου ο σύμβουλος έκανε προβλέψεις για αύξηση ή μείωση των μετοχών (π.χ. από τις 100 προβλέψεις που έχει κάνει ο σύμβουλος για αύξηση των μετοχών, μόνο στις 80 φορές οι μετοχές αυξήθηκαν. Στις υπόλοιπες 20 μειώθηκαν). Με βάση αυτά τα στοιχεία, μπορούμε να εξάγουμε και τις συμπληρωματικές πιθανότητες:

- Η πιθανότητα να δώσει πρόβλεψη για αύξηση των μετοχών (x_1) δεδομένου ότι οι μετοχές μειώθηκαν (d_2) $\rightarrow P(x_1/d_2) = 1 - P(x_2/d_2) = 0.3$
(αποτυχημένη πρόβλεψη αύξησης)

- Η πιθανότητα να δώσει πρόβλεψη για μείωση των μετοχών (x_2) δεδομένου ότι οι μετοχές αυξήθηκαν (d_1) $\rightarrow P(x_2/d_1) = 1 - P(x_1/d_1) = 0.2$
(αποτυχημένη πρόβλεψη μείωσης)

Αφού έχουμε καταγράψει τα γνωστά μας ενδεχόμενα και τις πιθανότητες πραγματοποίησής τους, μπορούμε να κατασκευάσουμε το δέντρο απόφασης:



Εφόσον έχουμε κατασκευάσει το δέντρο, μπορούμε να υπολογίζουμε τις τελικές αποπληρωμές. Αυτές βρίσκονται πάντα στο δεξί άκρο του δέντρου και αποτελούν τις αποπληρωμές που θα πάρουμε αν πραγματοποιηθούν συγκεκριμένα ενδεχόμενα.

$$T_1 = 510000 - \alpha$$

$$T_2 = 490000 - \alpha$$

$$T_3 = 500000 - \alpha$$

$$T_4 = 500000 - \alpha$$

$$T_5 = 510000 - \alpha$$

$$T_6 = 490000 - \alpha$$

$$T_7 = 500000 - \alpha$$

$$T_8 = 500000 - \alpha$$

$$T_9 = 510000$$

$$T_{10} = 490000$$

$$T_{11} = 500000$$

$$T_{12} = 500000$$

Όλες οι αποπληρωμές είναι σε €.

Π.χ.

Η τελική αποπληρωμή T_1 αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου έχουμε δεχτεί την πρόβλεψη του συμβούλου, έχουμε επενδύσει τα λεφτά μας σε μετοχές, και οι μετοχές έχουν αυξηθεί. Άρα εισπράττουμε 510000 €, αλλά αφαιρούμε το μισθό του συμβούλου.

Η τελική αποπληρωμή T_4 αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου έχουμε δεχτεί την πρόβλεψη του συμβούλου, αλλά τοποθετούμε τα λεφτά μας στην τράπεζα. Άρα εισπράττουμε 500000 € (το ποσό που βάλαμε), αφαιρώντας όμως το μισθό του συμβούλου.

Με παρόμοιο συλλογισμό, υπολογίζονται και οι υπόλοιπες αποπληρωμές.

Στο επόμενο βήμα της επίλυσης του δέντρου απόφασης, πρέπει να υπολογίσουμε τις άγνωστες πιθανότητες ενδεχομένων (αν υπάρχουν). Στην περίπτωση μας, έχουμε μερικά ενδεχόμενα, των οποίων την πιθανότητα πραγματοποίησης δεν γνωρίζουμε.

- το ενδεχόμενο ο σύμβουλος να προβλέψει αύξηση (x_1) $\rightarrow P(x_1) = ?$
- το ενδεχόμενο ο σύμβουλος να προβλέψει μείωση (x_2) $\rightarrow P(x_2) = ?$
- το ενδεχόμενο να αυξηθούν οι μετοχές δεδομένου ότι ο σύμβουλος προέβλεψε αύξηση ($d_1 | x_1$) $\rightarrow P(d_1 | x_1) = ?$
- το ενδεχόμενο να μειωθούν οι μετοχές δεδομένου ότι ο σύμβουλος προέβλεψε αύξηση ($d_2 | x_1$) $\rightarrow P(d_2 | x_1) = ?$
- το ενδεχόμενο να αυξηθούν οι μετοχές δεδομένου ότι ο σύμβουλος προέβλεψε μείωση ($d_1 | x_2$) $\rightarrow P(d_1 | x_2) = ?$
- το ενδεχόμενο να μειωθούν οι μετοχές δεδομένου ότι ο σύμβουλος προέβλεψε μείωση ($d_2 | x_2$) $\rightarrow P(d_2 | x_2) = ?$

Για να υπολογίσουμε τα ενδεχόμενα αυτά, θα κάνουμε χρήση του κανόνα του Bayes και του Θεωρήματος Ολικής Πιθανότητας.

$$P(d_1 | x_1) = [P(x_1 | d_1) * P(d_1)] / P(x_1) = (0.8 * 0.6) / 0.6 = 0.8$$

$$P(x_1) = P(x_1 | d_1) * P(d_1) + P(x_1 | d_2) * P(d_2) = 0.8 * 0.6 + 0.3 * 0.4 = 0.6$$

$$P(d_2 | x_1) = 1 - P(d_1 | x_1) = 0.2$$

$$P(d_1 | x_2) = [P(x_2 | d_1) * P(d_1)] / P(x_2) = (0.2 * 0.6) / 0.4 = 0.3$$

$$P(x_2) = P(x_2 | d_1) * P(d_1) + P(x_2 | d_2) * P(d_2) = 0.2 * 0.6 + 0.7 * 0.4 = 0.4$$

$$P(d_2 | x_2) = 1 - P(d_1 | x_2) = 0.7$$

Τώρα, όλες μας οι πιθανότητες είναι γνωστές. Μπορούμε να επιλύσουμε το δέντρο. Το δέντρο απόφασης κατασκευάζεται απο τα αριστερά προς τα δεξιά και επιλύεται απο τα δεξιά προς τα αριστερά.

Επειδή έχουμε αβεβαία ενδεχόμενα, θα πρέπει να υπολογίσουμε την Αναμενόμενη Χρηματική Αποπληρωμή (Expected Monetary Value - EMV) σε κάθε κόμβο τύχης (και μόνο εκεί) του δέντρου απόφασης.

$$\text{Κόμβος τύχης } A_{11} \rightarrow EMV_{A_{11}} = P(d_1 | x_1) * T_1 + P(d_2 | x_1) * T_2 = 0.8 * (510000 - a) + 0.2 * (490000 - a) = 506000 - a$$

$$\text{Κόμβος τύχης } A_{12} \rightarrow EMV_{A_{12}} = P(d_1 | x_1) * T_3 + P(d_2 | x_1) * T_4 = 0.8 * (500000 - a) + 0.2 * (500000 - a) = 500000 - a$$

$$\text{Κόμβος τύχης } A_{13} \rightarrow EMV_{A_{13}} = P(d_1 | x_2) * T_5 + P(d_2 | x_2) * T_6 = 0.3 * (510000 - a) + 0.7 * (490000 - a) = 496000 - a$$

$$\text{Κόμβος τύχης } A_{14} \rightarrow EMV_{A_{14}} = P(d_1 | x_2) * T_7 + P(d_2 | x_2) * T_8 = 0.3 * (500000 - a) + 0.7 * (400000 - a) = 500000 - a$$

Έπειτα, στον κόμβο απόφασης B_1 , θα πρέπει να πάρουμε μια απόφαση: να ακολουθήσουμε το ενδεχόμενο E_2 (τοποθέτηση χρημάτων σε μετοχές) ή το ενδεχόμενο E_3 (τοποθέτηση χρημάτων στην τράπεζα). Εδώ, θα συγκρίνουμε τις αναμενόμενες αποπληρωμές $EMV_{A_{11}}$ με την $EMV_{A_{12}}$. Παρατηρούμε οτι για κάθε τιμή του μισθού του συμβούλου, συμφέρει να τοποθετήσουμε τα χρήματά μας σε μετοχές. Άρα δεχόμαστε την E_2 και απορρίπτουμε την E_3 .

Με την ίδια λογική, και στον κόμβο απόφασης B_2 , συγκρίνουμε τις $EMV_{A_{13}}$ με την $EMV_{A_{14}}$. Εδώ, απορρίπτουμε την τοποθέτηση χρημάτων σε μετοχές, και δεχόμαστε την τοποθέτηση χρημάτων στην τράπεζα.

Πηγαίνοντας ένα βήμα προς τα αριστερά του δέντρου απόφασης, θα πρέπει να δούμε ποιά είναι η αρχική μας απόφαση (κόμβος απόφασης A). Για να το βρούμε αυτό, θα πρέπει να βρούμε ποιός απο τους κόμβους τύχης A_1, A_2, A_3 έχει την μεγαλύτερη EMV.

$$\text{Κόμβος τύχης } A_1 \rightarrow EMV_{A_1} = P(x_1) * EMV_{A_{11}} + P(x_2) * EMV_{A_{14}} = 0.6 * (506000 - a) + 0.4 * (500000 - a) = 503600 - a$$

$$\text{Κόμβος τύχης } A_2 \rightarrow EMV_{A_2} = P(d_1) * T_9 + P(d_2) * T_{10} = 0.6 * 510000 + 0.4 * 490000 = 502000$$

$$\text{Κόμβος τύχης } A_3 \rightarrow EMV_{A_3} = P(d_1) * T_{11} + P(d_2) * T_{12} = 0.6 * 500000 + 0.4 * 500000 = 500000$$

Εφόσον έχουμε υπολογίσει τις αναμενόμενες αποπληρωμές, μπορούμε να πάρουμε την απόφαση. Επειδή, όμως, στο παράδειγμα μας μερικές αναμενόμενες αποπληρωμές είναι γραμμικά συσχετισμένες (αρνητικά) με την αμοιβή του συμβούλου, θα πρέπει να προσαρμόσουμε την απόφαση μας σε σχέση με το ύψος της αμοιβής.

Καταρχάς, μπορούμε να βρούμε την οριακή τιμή της αμοιβής του συμβούλου:

$503600 - \alpha \geq 502000 \Rightarrow \alpha \leq 1600$ (αξίας τέλειας πληροφορίας)

Η αξία της τέλειας πληροφορίας απαντάει στο ερώτημα πόσο είμαστε διατεθειμένοι να πληρώσουμε για να πάρουμε μια βοήθεια (πληροφορία) από κάποιον ειδικό, η οποία θα μας βοηθήσει στη λήψη μιας απόφασης. Μπορεί να οριστεί από την ακόλουθη σχέση:

Αξία τέλειας πληροφορίας: $EMV_{WH} - EMV_{NH}$

όπου,

EMV_{WH} , είναι η αναμενόμενη χρηματική αξία με τη βοήθεια

EMV_{NH} , είναι η αναμενόμενη χρηματική αξία χωρίς τη βοήθεια

Αρα στη δική μας περίπτωση, αν δεν υπήρχε ο σύμβουλος (εξωτερική βοήθεια), θα επιλέγαμε την τοποθέτηση σε μετοχές ($EMV_{NH} = 502000$). Αν υπήρχε ο σύμβουλος, θα είμασταν διατεθειμένοι να πληρώσουμε μέχρι ($EMV_{WH} - EMV_{NH} = 503600 - 502000 = 1600$ €) για να δεχτούμε την πληροφορία αυτή.

Έτσι, για να δεχθούμε την πληροφορία που μας δίνετε, από τον σύμβουλο, είμαστε διατεθειμένοι να δώσουμε μέχρι 1600 €.

Αν η αμοιβή του συμβούλου είναι μεγαλύτερη από 1600 €, τότε επιλέγουμε την E_2 απόφαση, δηλαδή να τοποθετήσουμε τα χρήματά μας σε μετοχές, χωρίς να πάρουμε τη συμβουλή.

Αν η αμοιβή του συμβούλου είναι μικρότερη από 1600 €, τότε επιλέγουμε την E_1 απόφαση, δηλαδή να δεχόμαστε την πρόβλεψη του συμβούλου. Αν ο σύμβουλος προβλέψει αύξηση των μετοχών, τότε εμείς τοποθετούμε τα χρήματά μας σε μετοχές (E_2). Αν ο σύμβουλος προβλέψει μείωση των μετοχών, τοποθετούμε τα λεφτά μας στην τράπεζα (E_3).

Στην περίπτωση, όπου ο μισθός του συμβούλου είναι 1600 €, ο επενδυτής είναι αδιάφορος μεταξύ των αποφάσεων E_1 και E_2

ΑΣΚΗΣΗ 2

Μια εταιρία νημάτων το 1963 αντιμετωπίζει το δίλημμα να αναπτύξει ή όχι πολυεστέρα κατάλληλο για την ενίσχυση ελαστικών αυτοκινήτου. Αν η εταιρία αποφασίσει την ανάπτυξη του πολυεστέρα, η κρίσιμη παράμετρος είναι αν η ασφάλεια που θα προσφέρει το νέο προϊόν θα είναι μεγαλύτερη από αυτήν του ήδη χρησιμοποιούμενου νάυλον. Στη συνέχεια η εταιρία θα πρέπει να αποφασίσει αν θα παράγει το προϊόν ή όχι. Η επιτυχία του θα εξαρτηθεί από τον συναγωνισμό. Το συμβούλιο εκτίμησε ότι η πιθανότητα το νέο προϊόν να είναι ανώτερο του νάυλον είναι 0.20 και η πιθανότητα το νέο προϊόν να συναντήσει συναγωνισμό είναι 0.30. τα σχετικά κόστη είναι τα ακόλουθα:

- -5000000 €, αν δε γίνει παραγωγή του προϊόντος
- Αν ο πολυεστέρας είναι ανώτερος από το νάυλον, και υπάρχει συναγωνισμός: 10000000 €
- Αν ο πολυεστέρας είναι ανώτερος από το νάυλον, και δεν υπάρχει συναγωνισμός: 30000000 €

- Αν ο πολυεστέρας είναι κατώτερος από το νάυλον, και υπάρχει συναγωνισμός: -15000000 €
- Αν ο πολυεστέρας είναι κατώτερος από το νάυλον, και δεν υπάρχει συναγωνισμός: -2000000 €

Το συμβούλιο καλείται να πάρει αποφάσεις σε 2 στάδια: πρώτον αν θα αναπτύξει ή όχι το νέο προϊόν με τον πολυεστέρα, και στη συνέχεια αν θα προβεί σε παραγωγή του νέου προϊόντος.

Τα αβέβαια ενδεχόμενα του προβλήματος μας είναι τα ακόλουθα:

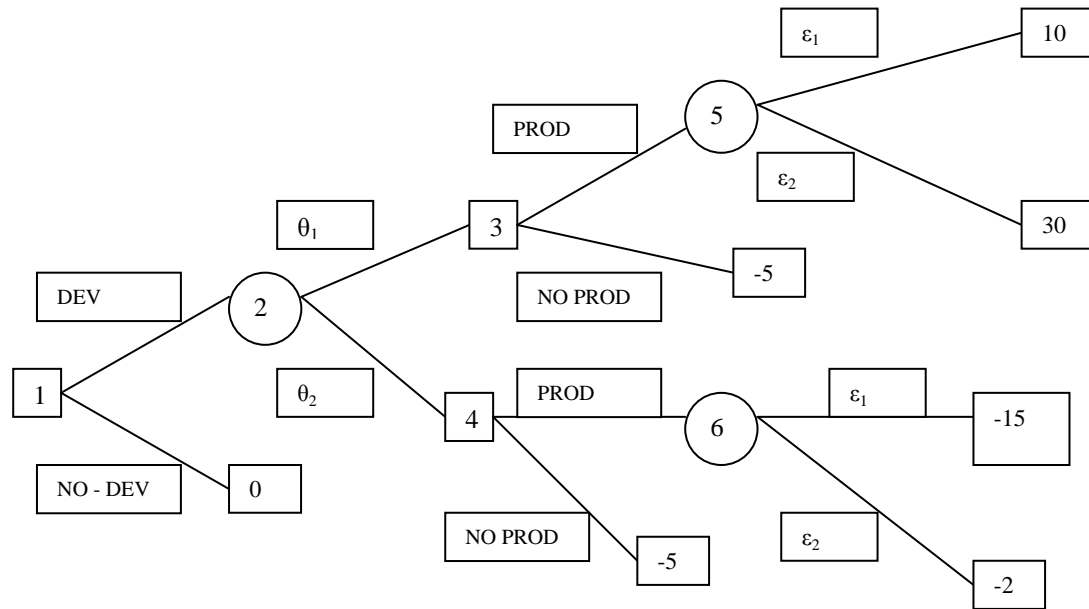
θ_1 , ο πολυεστέρας να είναι ανώτερος από το νάυλον: $P(\theta_1) = 0.2$

θ_2 , ο πολυεστέρας να είναι ανώτερος από το νάυλον: $P(\theta_2) = 1 - P(\theta_1) = 0.8$

ε_1 , υπάρχει συναγωνισμός: $P(\varepsilon_1) = 0.3$

ε_2 , υπάρχει συναγωνισμός: $P(\varepsilon_2) = 1 - P(\varepsilon_1) = 0.7$

Εφόσον, έχουμε όλες τις πληροφορίες μπορούμε να κατασκευάσουμε το δέντρο απόφασης.



Εφόσον έχουμε κατασκευάσει το δέντρο απόφασης, μπορούμε να προχωρήσουμε στην επίλυση του. Καταρχάς, βρίσκουμε τις αναμενόμενες χρηματικές αξίες στους κόμβους τύχης (5,6,2)

$$EMV_5 = P(\varepsilon_1) * 10000000 + P(\varepsilon_2) * 30000000 = 0.3 * 10000000 + 0.7 * 30000000 = 24000000 \text{ €}$$

$$EMV_6 = P(\varepsilon_1) * (-15000000) + P(\varepsilon_2) * (-20000000) = 0.3 * (-15000000) + 0.7 * (-20000000) = -59000000 \text{ €}$$

Έπειτα, θα πρέπει να πάρουμε έχουμε 2 κόμβους απόφασης (3,4). Στον κόμβο απόφασης 3, συγκρίνουμε την αναμενόμενη χρηματική αξία του κόμβου τύχης 5 (EMV_5) με την χρηματική αξία στην περίπτωση της μη-παραγωγής και επιλέγουμε το μεγαλύτερο. Άρα η απόφαση μας είναι να παράγουμε το προϊόν. Στον κόμβο απόφασης 4 κάνουμε ακριβώς το ίδιο πράγμα. Η απόφαση που καταλήγουμε είναι να μην παράγουμε. Πηγαίνοντας ένα βήμα προς τα αριστερά, έχουμε τον κόμβο τύχης 2, και θα πρέπει να υπολογίσουμε την αναμενόμενη χρηματική αξία σε αυτόν τον κόμβο.

$$EMV_2 = P(\theta_1) * EMV_5 + P(\theta_2) * (-5000000) = 0.2 * 24000000 + 0.8 * (-5000000) = 800000 \text{ €}$$

Άρα καταλήγουμε στην εξής απόφαση: αποφασίζουμε να προβούμε στην ανάπτυξη του νέου προϊόντος με τον πολυεστέρα. Στην περίπτωση που το νέο προϊόν είναι καλύτερο από το ήδη υπάρχον με το νάυλον, τότε προχωράμε στην παραγωγή του προϊόντος. Στην αντίθετη περίπτωση, όταν το νέο προϊόν με τον πολυεστέρα δεν είναι καλύτερο από το ήδη υπάρχον με το νάυλον, τότε δεν προχωράμε στην παραγωγή του νέου προϊόντος.

ΑΣΚΗΣΗ 3 (ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΝΕΟΥ ΠΡΟΪΟΝΤΟΣ)

Μια εταιρεία εξετάζει το ενδεχόμενο να προωθήσει στην αγορά ένα νέο προϊόν, το οποίο ανέπτυξε στα εργαστήρια της. Αρχικά, σκέφτεται να προχωρήσει σε μια δοκιμή του νέου προϊόντος στην αγορά. Το κόστος της δοκιμής είναι 100000 €, ενώ η προηγούμενη εμπειρία έχει δείξει ότι μόνο το 30% των προϊόντων πετυχαίνουν στη δοκιμή.

Εάν το προϊόν επιτύχει στη δοκιμή, τότε η εταιρεία πρέπει να εξετάσει την περίπτωση της κατασκευής ενός εργοστασίου που θα παράγει το προϊόν αυτό. Το μέγεθος του εργοστασίου είναι μία επιπλέον παράμετρος που πρέπει να ρυθμιστεί. Ένα εργοστάσιο μικρής παραγωγής κοστίζει 150000 € και παράγει 2000 μονάδες το χρόνο. Ένα εργοστάσιο μεγάλης κλίμακας κοστίζει 250000 € και παράγει 4000 μονάδες το χρόνο.

Το τμήμα μάρκετινγκ της εταιρείας εκτιμά ότι με πιθανότητα 40% θα δημιουργηθεί, λόγω ανταγωνισμού, και ένα άλλο παρόμοιο προϊόν, γεγονός που οπωσδήποτε θα επηρεάσει την τιμή του υπό μελέτη προϊόντος. Ένας επιπλέον παράγοντας που διαμορφώνει την τιμή του προϊόντος είναι το μέγεθος του εργοστασίου παραγωγής. Αναλυτικά, έχουμε τα εξής δεδομένα για την τιμή ανά μονάδα προϊόντος:

	Μεγάλο εργοστάσιο	Μικρό εργοστάσιο
Υπάρχει ανταγωνισμός	20 €	35 €
Δεν υπάρχει ανταγωνισμός	50 €	65 €

Υποθέτοντας ότι ο κύκλος ζωής του προϊόντος είναι περίπου 7 χρόνια και το κόστος λειτουργίας του εργοστασίου είναι 50000 €/έτος, ανεξαρτήτως μεγέθους, τι θα προτείνατε στην εταιρεία να κάνει;

Λύση

Αρχικά, η εταιρεία έχει τις εξής δύο επιλογές: α) να δοκιμάσει το προϊόν στην αγορά και β) να εγκαταλείψει την ιδέα αυτή, διατηρώντας την υπάρχουσα κατάσταση. Εφόσον αποφασιστεί η δοκιμή, τότε υπάρχουν δύο πιθανές εκδοχές: επιτυχία ή αποτυχία του προϊόντος στην αγορά. Σε περίπτωση αποτυχίας, η εταιρεία θα ζημιωθεί κατά 100000 €. Αν, όμως, το προϊόν πετύχει, η εταιρεία θα πρέπει να αποφασίσει, σε πρώτο στάδιο αν θα χτίσει εργοστάσιο παραγωγής και σε δεύτερο στάδιο αν το εργοστάσιο αυτό θα είναι μεγάλο ή μικρό. Εφόσον η εταιρεία προχωρήσει στην κατασκευή του εργοστασίου, τότε, ανεξαρτήτως μεγέθους παραγωγής, θα έρθει αντιμέτωπη με δύο ενδεχόμενα: την ύπαρξη ή μη ανταγωνισμού.

Ας υπολογίσουμε, τώρα, τα ποσά σε κάθε περίπτωση. Είναι σημαντικό να προσέξουμε ότι στη διατύπωση του προβλήματος αναφέρονται μόνο τα αναμενόμενα έσοδα ή έξοδα, και όχι το καθαρό κέρδος. Το τελευταίο προκύπτει από τη σχέση:

$$\text{Καθαρό κέρδος} = \text{μονάδες προϊόντος που παράγονται κάθε χρόνο} \times \text{τιμή του προϊόντος} \times \text{κύκλος ζωής του προϊόντος} - \text{ετήσιο κόστος λειτουργίας εργοστασίου} \times \text{κύκλος ζωής του προϊόντος}$$

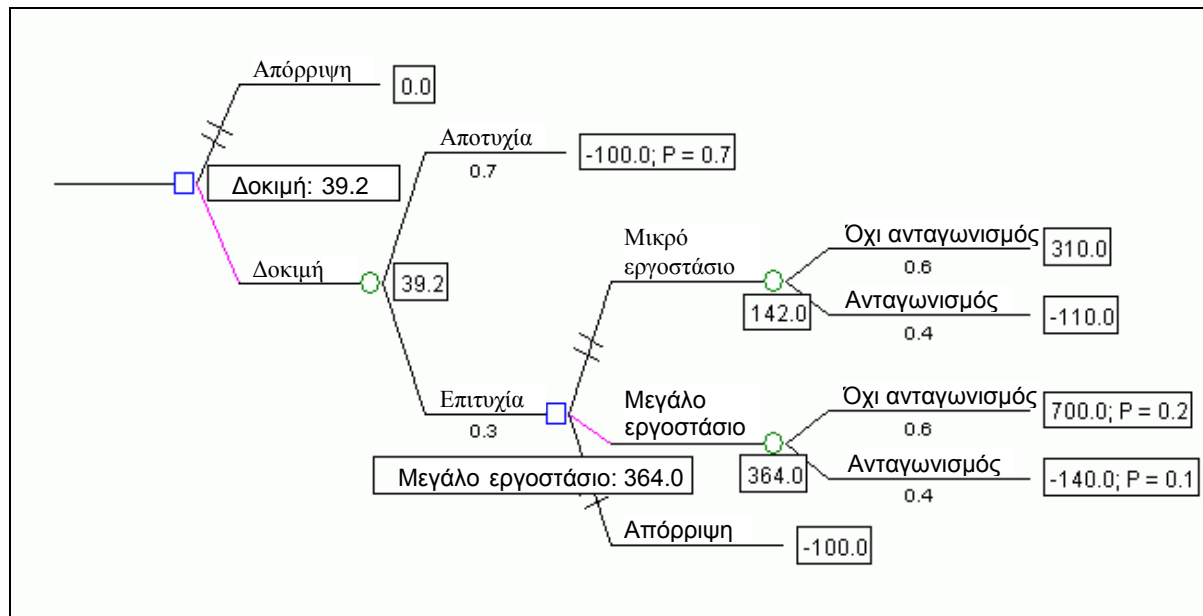
Έτσι, τα συνολικά καθαρά κέρδη ανάλογα με το μέγεθος του εργοστασίου και την ύπαρξη ή όχι ανταγωνισμού διαμορφώνονται ως εξής.

	Μεγάλο εργοστάσιο	Μικρό εργοστάσιο
Υπάρχει ανταγωνισμός	$4000 \cdot 7 \cdot 20 - 50000 \cdot 7 = 210000 \text{ €}$	$2000 \cdot 7 \cdot 35 - 50000 \cdot 7 = 140000 \text{ €}$
Δεν υπάρχει ανταγωνισμός	$4000 \cdot 7 \cdot 50 - 50000 \cdot 7 = 1050000 \text{ €}$	$2000 \cdot 7 \cdot 65 - 50000 \cdot 7 = 560000 \text{ €}$

Από τα ποσά που φαίνονται στον πίνακα, θα πρέπει να αφαιρέσουμε 100000 €, τα έξοδα της δοκιμής, και άλλα 150000 € ή 250000 €, το κόστος κατασκευής του μικρού ή του μεγάλου εργοστασίου αντίστοιχα. Έτσι, τα τελικά καθαρά κέρδη σε κάθε περίπτωση φαίνονται στον επόμενο πίνακα (τα ποσά είναι σε χιλ. €)

	Μεγάλο εργοστάσιο	Μικρό εργοστάσιο
Υπάρχει ανταγωνισμός	$210-100-250=-140$	$140-100-150=-110$
Δεν υπάρχει ανταγωνισμός	$1050-100-250=700$	$560-100-150=310$

Έχοντας, πλέον, υπολογίσει τις τελικές αποπληρωμές μπορούμε να σχεδιάσουμε και να λύσουμε το δέντρο απόφασης του προβλήματος, το οποίο φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Η λύση του προβλήματος

Παρατηρούμε ότι η βέλτιστη στρατηγική είναι η δοκιμή του προϊόντος. Εάν η τελευταία αποβεί θετική (πιθανότητα 0.3), τότε συνιστάται η δημιουργία ενός μεγάλου εργοστασίου. Η απόφαση αυτή εγγυάται, σε ένα χρονικό ορίζοντα επτά ετών, καθαρά κέρδη της τάξεως των 700000 € σε περιβάλλον έλλειψης ανταγωνισμού και -140000 € σε ένα ανταγωνιστικό περιβάλλον. Σε περίπτωση αποτυχίας της δοκιμής (πιθανότητα 0.7), η εταιρεία χάνει -100000 €. Αν και βέλτιστη, η στρατηγική που περιγράφηκε παραπάνω έχει μεγάλο βαθμό ρίσκου, αφού συνδυάζει τα μεγαλύτερα κέρδη με τις μεγαλύτερες ζημίες.

ΑΣΚΗΣΗ 4 (ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΓΕΩΤΡΗΣΗΣ)

Η Δημόσια Επιχείρηση Πετρελαίου έχει παραχωρήσει μια περιοχή σε εταιρεία γεωτρήσεων για την διενέργεια γεωτρήσεων προς ανακάλυψη πετρελαίου. Σύμφωνα με το συμβόλαιο, η εταιρεία έχει το δικαίωμα να διερευνήσει την περιοχή αλλά αμείβεται μόνο για τα έξοδα ενός συγκεκριμένου αριθμού γεωτρήσεων σε προεπιλεγμένες θέσεις συν ό,τι κέρδος έχει από τις γεωτρήσεις αυτές. Η εταιρεία έχει το δικαίωμα να κάνει επιπλέον γεωτρήσεις όπου αυτή πιστεύει ότι θα βρει πετρέλαιο. Το δίλημμα της εταιρείας είναι:

- Να κάνει μια έξτρα γεώτρηση σε μια προσδιορισμένη μικρότερη περιοχή. Η τελευταία στοιχίζει 40000 € και αν είναι επιτυχής επιφέρει έσοδα της τάξεως των 150000 €.
- Να θεωρήσει ότι τελείωσε το έργο της.

Η εταιρεία εκτιμά ότι με πιθανότητα 0.46 η νέα γεώτρηση θα είναι παραγωγική. Πριν πάρει όμως κάποια απόφαση μπορεί να εκτελέσει έναν εξειδικευμένο σεισμικό έλεγχο της συγκεκριμένης περιοχής. Ο σεισμικός έλεγχος μπορεί να προβλέψει 2 καταστάσεις:

- Ύπαρξη δομής του υπεδάφους που να συνιστά την ύπαρξη κοιτασμάτων πετρελαίου (K1).
- Μη ύπαρξη δομής του υπεδάφους που να συνιστά την ύπαρξη κοιτασμάτων πετρελαίου (K2).

Η προηγούμενη εμπειρία έχει δείξει ότι στις περιπτώσεις που βρέθηκε πετρέλαιο υπήρξε δομή σε ποσοστό 92% ενώ δεν υπήρξε σε ποσοστό 8%. Αντίστοιχα, δεν βρέθηκε πετρέλαιο όταν δεν υπήρχε η κατάλληλη δομή σε ποσοστό 67%, ενώ υπήρχε στο 33%.

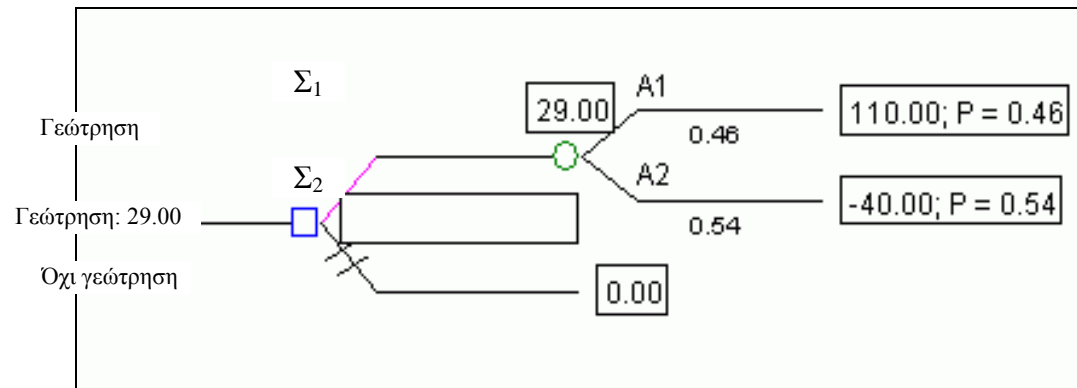
Βάσει των παραπάνω ζητούνται:

1. Το δέντρο λήψης απόφασης με βάση την υπάρχουσα και μόνο πληροφόρηση καθώς και η **βέλτιστη επιλογή**.
2. Οι αναθεωρημένες πιθανότητες σε περίπτωση που γίνει ο σεισμικός έλεγχος.
3. Το δέντρο λήψης απόφασης στο οποίο εξετάζουμε την περίπτωση του ελέγχου και η νέα **βέλτιστη επιλογή**.
4. Η αναμενόμενη αξία πληροφορίας που απορρέει από τον σεισμικό έλεγχο.

Λύση

1. Το δέντρο απόφασης του προβλήματος χωρίς τον έλεγχο φαίνεται στην επόμενη εικόνα (τα ποσά είναι σε χιλιάδες €).

Δέντρο απόφασης χωρίς τον έλεγχο



όπου $\Sigma_1 \equiv$ 'Εύρεση πετρελαίου' και $\Sigma_2 \equiv$ 'Μη εύρεση πετρελαίου'.

2. Στην περίπτωση όπου κάνουμε τον σεισμικό έλεγχο οι πιθανότητες να υπάρχει ή όχι πετρέλαιο θα είναι:

α) Η πιθανότητα ο έλεγχος να δείξει δομή είναι:

$$P(K1) = P(K1 | \Sigma_1) * P(\Sigma_1) + P(K1 | \Sigma_2) * P(\Sigma_2) = 0.92 * 0.46 + 0.33 * 0.54 = 0.60$$

και η πιθανότητα να υπάρχει πετρέλαιο, δοθέντος ότι το αποτέλεσμα του ελέγχου είναι θετικό, είναι:

$$P(\Sigma_1 / K1) = \frac{P(K1 / \Sigma_1) * P(\Sigma_1)}{P(K1)} = \frac{0.92 * 0.46}{0.60} = 0.70$$

Επομένως η πιθανότητα να μην υπάρχει πετρέλαιο, δοθέντος ότι το αποτέλεσμα του ελέγχου είναι θετικό, είναι: $P(\Sigma_2 | K1) = 0.30$

β) Η πιθανότητα ο έλεγχος να μην δείξει δομή είναι:

$$P(K2) = P(K2 | \Sigma1) * P(\Sigma1) + P(K2 | \Sigma2) * P(\Sigma2) = 0.08 * 0.46 + 0.67 * 0.54 = 0.40$$

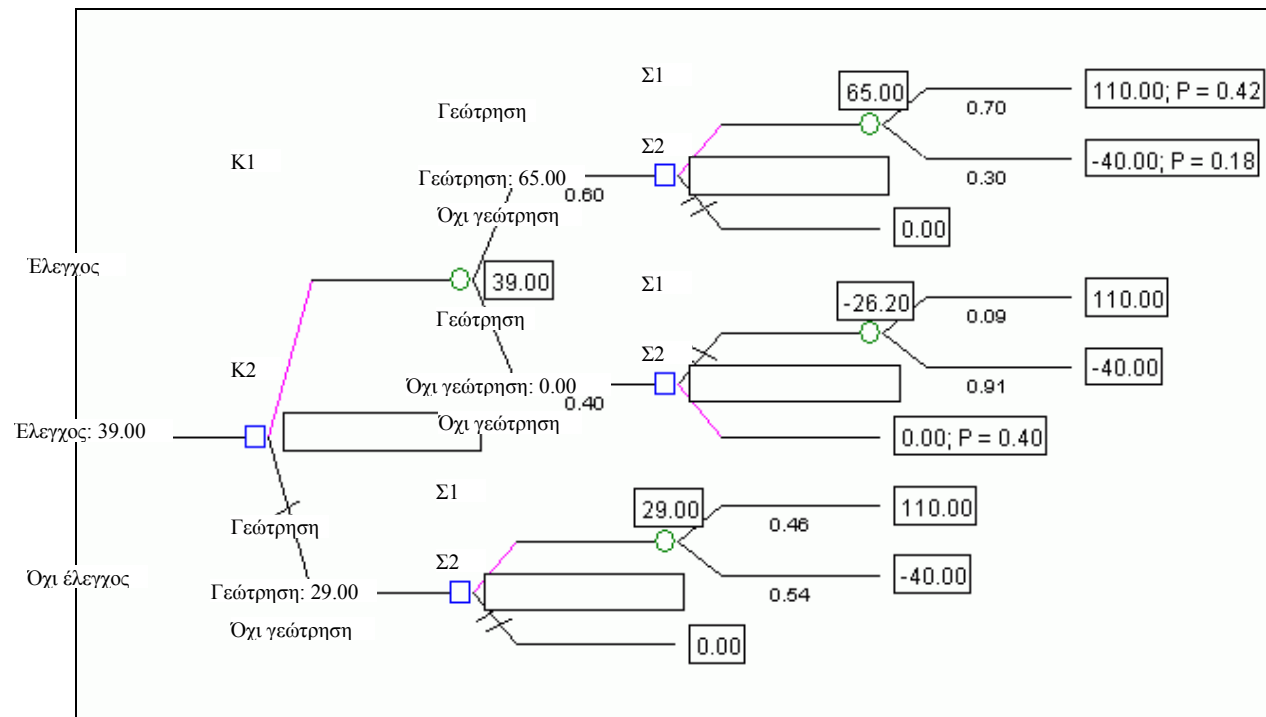
και η πιθανότητα να υπάρχει πετρέλαιο, δοθέντος ότι το αποτέλεσμα του ελέγχου είναι αρνητικό, είναι:

$$P(\Sigma1 / K2) = \frac{P(K2 / \Sigma1) * P(\Sigma1)}{P(K2)} = \frac{0.08 * 0.46}{0.40} = 0.092$$

Επομένως η πιθανότητα να μην υπάρχει πετρέλαιο, δοθέντος ότι το αποτέλεσμα του ελέγχου είναι αρνητικό, είναι : $P(\Sigma2 | K2) = 0.908$

3. Το δέντρο απόφασης του προβλήματος διενεργώντας τον έλεγχο φαίνεται στην επόμενη εικόνα (τα ποσά είναι σε χιλιάδες €).
4. Χωρίς την πληροφορία η EMV του προβλήματος ήταν 29000 €. Μετά την πληροφορία η EMV είναι 39000 €. Επομένως η αξία της πληροφορίας είναι ίση με την διαφορά των δύο αυτών τιμών δηλαδή 10000 €. Αυτή είναι και η αξία της τέλει πληροφορίας, δηλαδή το ποσό που είμαστε διατεθειμένοι να πληρώσουμε για να έχουμε μια ακριβέστερη πρόβλεψη.

Δέντρο απόφασης με τον έλεγχο



ΑΣΚΗΣΗ 5 (ΜΕΙΟΔΟΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ)

Η εταιρεία σας σκέφτεται να υποβάλλει προσφορά σε δύο μειοδοτικούς διαγωνισμούς (Δ1 και Δ2) που διοργανώνει μία κρατική υπηρεσία για την προμήθεια συγκεκριμένων εξαρτημάτων. Οι επιλογές που υπάρχουν είναι 3:

- Υποβολή προσφοράς για τον Δ1
- Υποβολή προσφοράς για τον Δ2
- Υποβολή προσφοράς για τον Δ1 και τον Δ2

Να σημειωθεί ότι αν η εταιρεία αποφασίσει να υποβάλλει αίτηση και στους δύο διαγωνισμούς, τότε ή κερδίζει και τους δύο ή κανέναν από αυτούς. Κάθε υποβολή προσφοράς έχει κάποιο χρηματικό κόστος. Το κόστος αυτό είναι συγκεκριμένο για κάθε υποβολή αίτησης και ανεξάρτητο από την τιμή των εξαρτημάτων που θα παραγγελθούν. Αν το συμβόλαιο δοθεί σε ανταγωνιστική εταιρία, τότε το κόστος της αίτησης είναι ζημία για την εταιρεία αφού χρήματα δεν επιστρέφονται.

- Το κόστος υποβολής αίτησης για τον Δ1 (Κόστος1α) είναι 50000 €. Αν η προμήθεια των εξαρτημάτων αναληφθεί από την εταιρεία, το κόστος πραγματοποίησης της προμήθειας (Κόστος1β) είναι 18000 €.
- Το κόστος υποβολής αίτησης για τον Δ2 (Κόστος2α) είναι 14000 €. Αν η προμήθεια των εξαρτημάτων αναληφθεί από την εταιρεία, το κόστος πραγματοποίησης της προμήθειας (Κόστος2β) είναι 12000 €.
- Το κόστος υποβολής αίτησης και για τους δύο διαγωνισμούς Δ1 και Δ2 (Κόστος3α) είναι 55000 €. Αν η προμήθεια των εξαρτημάτων αναληφθεί από την εταιρεία, το κόστος πραγματοποίησης της προμήθειας (Κόστος3β) είναι 24000 €.

Οι διαγωνισμοί είναι μειοδοτικοί, πράγμα που σημαίνει ότι κερδίζει εκείνος που υποβάλλει τη χαμηλότερη προσφορά. Η εταιρεία σας, βάσει προηγούμενης εμπειρίας, εκτίμησε ότι για τις τιμές που αναγράφονται στον επόμενο πίνακα οι αντίστοιχες πιθανότητες να κερδίσει τον διαγωνισμό είναι αυτές που δίνονται στη τελευταία στήλη. Να σημειωθεί ότι η εταιρεία μπορεί να υποβάλει αίτηση με μία μόνο τιμή.

Διαγωνισμοί στους οποίους θα υποβληθούν αιτήσεις	Πιθανές υποβαλλόμενες τιμές	Πιθανότητα να κερδίσει τον διαγωνισμό με αυτήν την τιμή
Δ1	130000 €	0.20
	115000 €	0.85
Δ2	70000 €	0.15
	65000 €	0.80
	60000 €	0.95

Δ1 και Δ2	190000 €	0.05
	140000 €	0.65

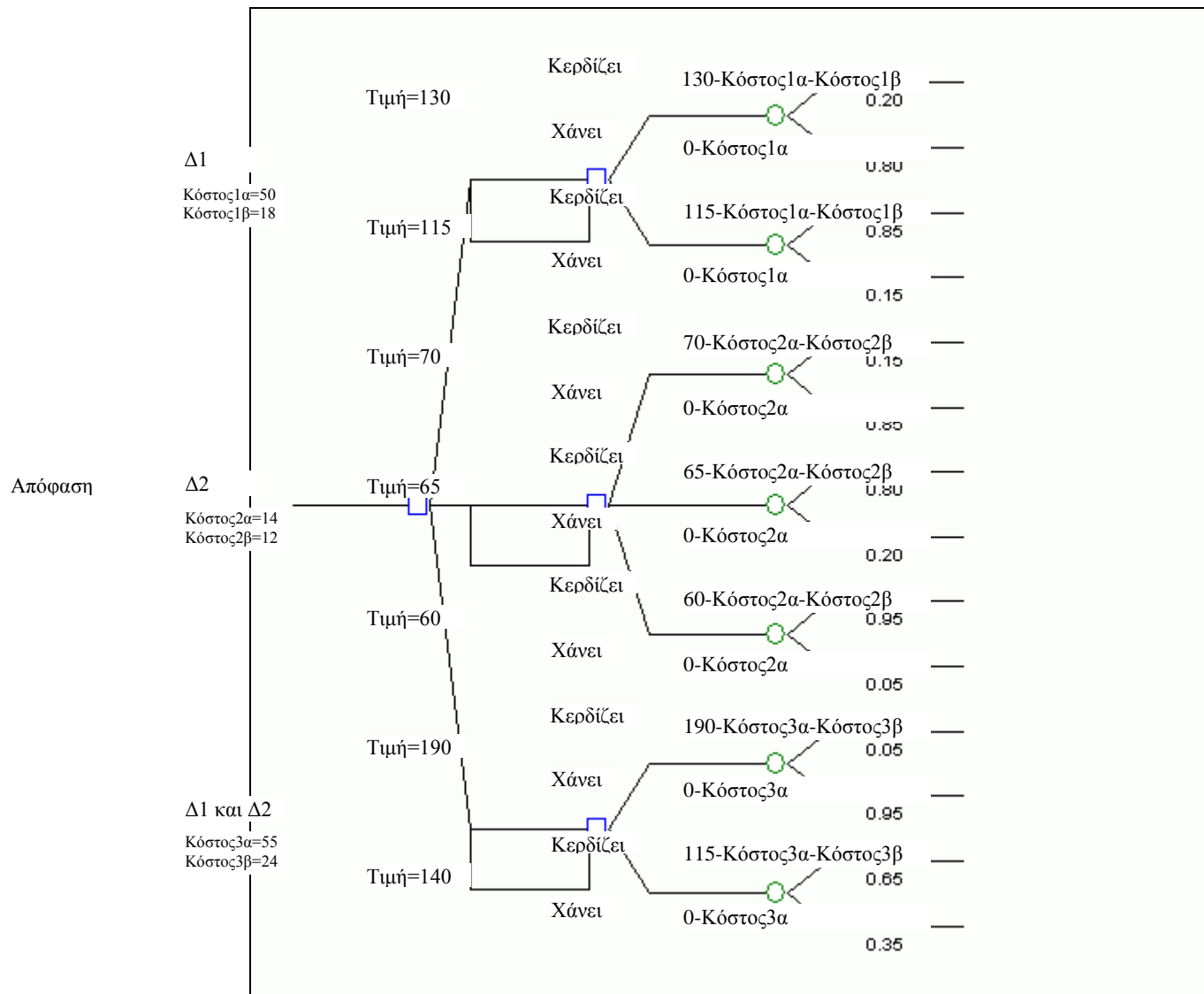
1. Τι θα συμβουλεύατε την εταιρεία να κάνει και γιατί;
2. Ποια τα πλεονεκτήματα και ποια τα μειονεκτήματα της προτεινόμενης λύσης σας;
3. Ας υποθέσουμε ότι σας πλησίαζε κάποιος και σας έλεγε ότι για 20000 € θα σας εξασφάλιζε ότι θα κερδίζατε τον Δ2. Αν η τιμή που θα καθορίζατε είναι 60000 €, θα δεχόσασταν ή όχι την προσφορά αυτή και γιατί;

Λύση

Το δέντρο απόφασης του προβλήματος φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Για λόγους ευκολίας τα ποσά αναγράφονται σε χιλιάδες € και όχι ολογράφως.

Ας εξηγήσουμε εν συντομία γιατί το δέντρο απόφασης του προβλήματος έχει τη δεδομένη μορφή:

1. Η πρώτη επιλογή μας είναι να διαλέξουμε σε ποιο μειοδοτικό διαγωνισμό θα κάνουμε προσφορά. Ως γνωστό, οι επιλογές μας είναι τρεις: Δ1, Δ2, Δ1 & Δ2. Κάθε αίτηση έχει κάποιο κόστος, το οποίο σημειώνεται στους κόμβους ως Κόστος1α, Κόστος2α και Κόστος3α αντίστοιχα.
2. Για κάθε διαγωνισμό έχουμε να επιλέξουμε μια τιμή από τον παραπάνω πίνακα.



Το δέντρο απόφασης του προβλήματος

- Έχοντας ορίσει και τις τιμές, απομένει να εξετάσουμε το ενδεχόμενο να κερδίσουμε ή να χάσουμε κάθε διαγωνισμό με τις τιμές που καθορίσαμε. Αυτό **δεν εξαρτάται από εμάς** και γι' αυτό οι αντίστοιχοι κόμβοι είναι κόμβοι τύχης και όχι κόμβοι επιλογής.
- Απομένει η εύρεση των τιμών που αναγράφονται στα φύλλα του δένδρου. Ας εξετάσουμε για παράδειγμα την περίπτωση του Δ1 με τιμή προσφοράς τα 130000 €. Αν κερδίσουμε τον διαγωνισμό το κέρδος μας θα είναι ίσο με την τιμή αυτή (130000) μείον το κόστος της αίτησης του διαγωνισμού (Κόστος $1\alpha=50000$) μείον το κόστος πραγματοποίησης της προμήθειας (Κόστος $1\beta=18000$). Δηλαδή το καθαρό κέρδος για την εταιρεία θα είναι:
Τιμή-Κόστος 1α -Κόστος $1\beta=130000-50000-18000=62000$ €
Αν χάσουμε τον διαγωνισμό το κέρδος θα είναι προφανώς 0 €. Όμως έχουμε ήδη πληρώσει 50000 € (Κόστος 1α) για να κάνουμε την αίτηση. Άρα η εταιρεία μας έχει ζημιά ίση με -50000 €. Ομοίως αναλύονται και οι υπόλοιπες τιμές.

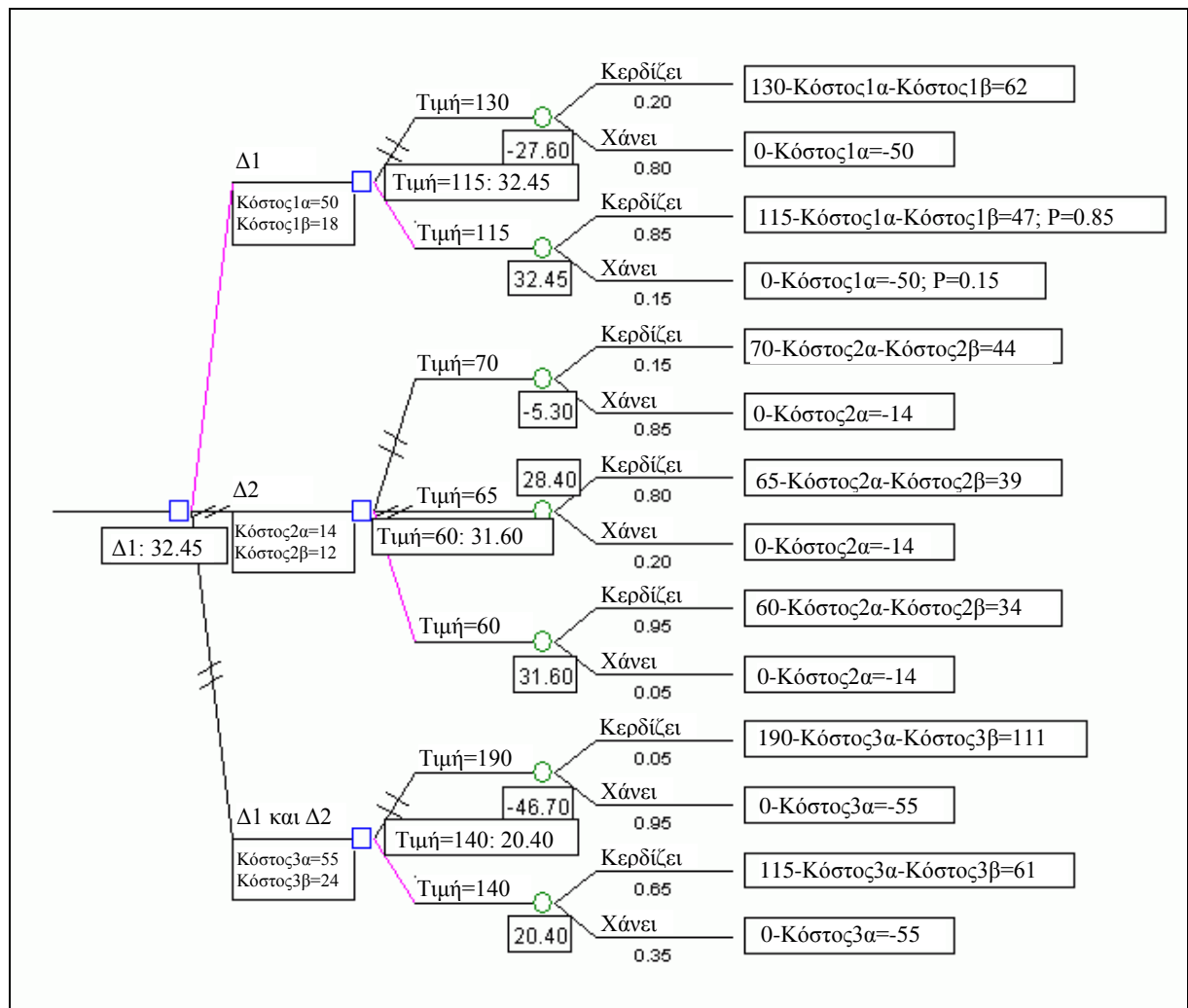
Έχοντας σχεδιάσει το δέντρο, μπορούμε να προχωρήσουμε στην επίλυσή του. Ως γνωστόν, υπολογίζουμε τις αναμενόμενες τιμές (EMV) σε κάθε κόμβο του δένδρου. Ας δώσουμε ένα παράδειγμα λύνοντας τον κόμβο Δ1 (τα ποσά είναι σε χιλιάδες €):

- Η EMV όταν η τιμή της προσφοράς είναι 130 είναι ίση με:
 $62*0.2+0.8*(-50)=-27.6$
- Η EMV όταν η τιμή της προσφοράς είναι 115 είναι ίση με:
 $47*0.85+0.15(-50)=32.45$
- Άρα η τιμή που θα υποβάλλουμε στο Δ1 είναι τα 115000 €, αφού με τη κίνησή μας αυτή εξασφαλίζουμε τη μεγαλύτερη EMV.

Η επίλυση του δένδρου απόφασης φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η βέλτιστη λύση είναι να υποβάλλουμε αίτηση μόνο στον Δ1 με τιμή 115000 €. Η EMV σε αυτήν την περίπτωση είναι 32450 € (λόγω του ότι η εταιρεία κερδίζει 47000 € με πιθανότητα 0.85 και ζημιώνεται κατά 50000 € με πιθανότητα 0.15).

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση που κάποιος μας εξασφάλιζε ότι αν του δίνουμε 20000 € θα κερδίζαμε τον Δ2 με τιμή 60000 €. Το κέρδος μας σε αυτήν περίπτωση θα ήταν: $60000-14000-12000-20000=14000$ €. Η EMV της βέλτιστης απόφασης είναι $32450 > 14000$ €, και επομένως

δεν συμφέρει να δεχθούμε την προσφορά. Το αποτέλεσμα αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι ουσιαστικά πληρώνουμε 20000 € για να αποφύγουμε ένα δυσμενές σενάριο που δεν είναι αρκετά πιθανό (πιθανότητα 5%). Αυτή η περίπτωση αποτελεί ένα παράδειγμα εφαρμογής της ανάλυσης ευαισθησίας. Στην ουσία, κατά την ανάλυση ευαισθησίας τροποποιούμε μια από τις παραμέτρους του προβλήματος μας ή εισάγουμε μια νέα πληροφορία (όπως στην συγκεκριμένη άσκηση) και εξετάζουμε αν μεταβάλλεται η αρχική μας απόφαση.



Η λύση του προβλήματος

Παρατήρηση !!!

Λόγω του ότι το κόστος υποβολής αίτησης προκαταβάλλεται, το δένδρο θα μπορούσε να επιλυθεί με έναν πιο «οικονομικό» τρόπο. Αντί να αφαιρούμε και τα δύο κόστη α και β από όλα τα τελικά αποτελέσματα, αφαιρούμε μόνο το κόστος πραγματοποίησης της προμήθειας (εφόσον κερδίζουμε τον αντίστοιχο διαγωνισμό), ενώ το κόστος αίτησης σε κάθε διαγωνισμού λαμβάνεται υπόψη όταν φτάσουμε στους κόμβους “ $\Delta 1$ ”, “ $\Delta 2$ ” και “ $\Delta 1$ και $\Delta 2$ ”.

ΑΣΚΗΣΗ 6 (ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΠΕΝΔΥΣΗΣ)

Ο πατέρας ενός φίλου, ο Γ.Κ., πήρε πρόσφατα το “εφ’ άπαξ” του 10000 €, και σκέφτεται πως να τοποθετήσει κατά τον αποδοτικότερο τρόπο τα χρήματά του για τον επόμενο χρόνο. Επειδή πιστεύει ότι τα κοινά επιτόκια καταθέσεων είναι αρνητικά σε σχέση με τον πληθωρισμό, προσανατολίζεται σε ένα επενδυτικό πακέτο με μερική κατάθεση προθεσμίας και μερική αγορά ομολόγων που λήγουν σε ένα χρόνο περίπου. Ο γνωστός του από την τράπεζα κ. Β.Π. του είπε για το πακέτο αυτό:

“Οι πιο έγκυρες εκτιμήσεις για την κατάσταση της οικονομίας τον επόμενο χρόνο δίνουν:

- 35% πιθανότητα να καλυτερεύσει, να μπούμε δηλαδή σε μια “κατάσταση ανάπτυξης” με αρκετά χαμηλό, κατά 5 μονάδες χαμηλότερο από φέτος πληθωρισμό.
- 40% πιθανότητα να μείνει όπως είναι, δηλαδή μια “κατάσταση σταθεροποίησης” με μικρή μείωση, κατά 2 μονάδες, του πληθωρισμού.
- 25% πιθανότητα να χειροτερεύσει. Στην περίπτωση αυτή μαζί με την επιδείνωση των άλλων οικονομικών μεγεθών, θα μπούμε και πάλι σε αυξητική “κατάσταση πληθωρισμού” που θα αυξηθεί για τον επόμενο χρόνο κατά 3 μονάδες περίπου.

Με το πακέτο αυτό, τα χρήματά σου θα αποδώσουν πάνω από το επίπεδο του προβλεπόμενου πληθωρισμού:

- 9% για την “κατάσταση ανάπτυξης
- 6% για την “κατάσταση σταθεροποίησης
- 1% για την “κατάσταση πληθωρισμού”

Επομένως, η λύση αυτή, κατά τη γνώμη μου, είναι μια πολύ καλή τοποθέτηση για τον 1 χρόνο που ενδιαφέρεσαι. Αν όμως ενδιαφέρεσαι να πάρεις κάποιο ρίσκο θα μπορούσα να σου προτείνω να αγοράσεις ορισμένες μετοχές της Εθνικής ή άλλης επιχείρησης. Για το θέμα αυτό καλύτερα να συζητήσεις με τον κοινό μας γνωστό κ. Α.Β., που όπως ξέρεις είναι ένας πολύ καλός χρηματιστής και μπορείς να τον εμπιστευτείς. Ο κ. Α. Β. είναι γνώστης των παραπάνω προβλέψεων θα σου δώσει αντίστοιχα στοιχεία για να μπορέσεις να κάνεις συγκρίσεις”.

Μετά τη συζήτηση αυτή ο κ. Γ.Κ. επισκέφτηκε τον γνωστό του χρηματιστή, ο οποίος του πρότεινε 2 εναλλακτικά πακέτα μετοχών με διαφορετικούς βαθμούς απόδοσης για τον επόμενο χρόνο, ανάλογα με την εξέλιξη της οικονομίας. Το ένα περιείχε κυρίως τραπεζικές μετοχές και οι εκτιμήσεις του χρηματιστή ήταν:

- 14% για την “κατάσταση ανάπτυξης”
- 3% για την “κατάσταση σταθεροποίησης”
- 0% για την “κατάσταση πληθωρισμού”

Το δεύτερο πακέτο περιείχε μετοχές σοβαρών υπό εξυγίανση εταιρειών με εκτιμώμενη απόδοση:

- 35% για την “κατάσταση ανάπτυξης”
- 0% για την “κατάσταση σταθεροποίησης”
- -10% για την “κατάσταση πληθωρισμού”

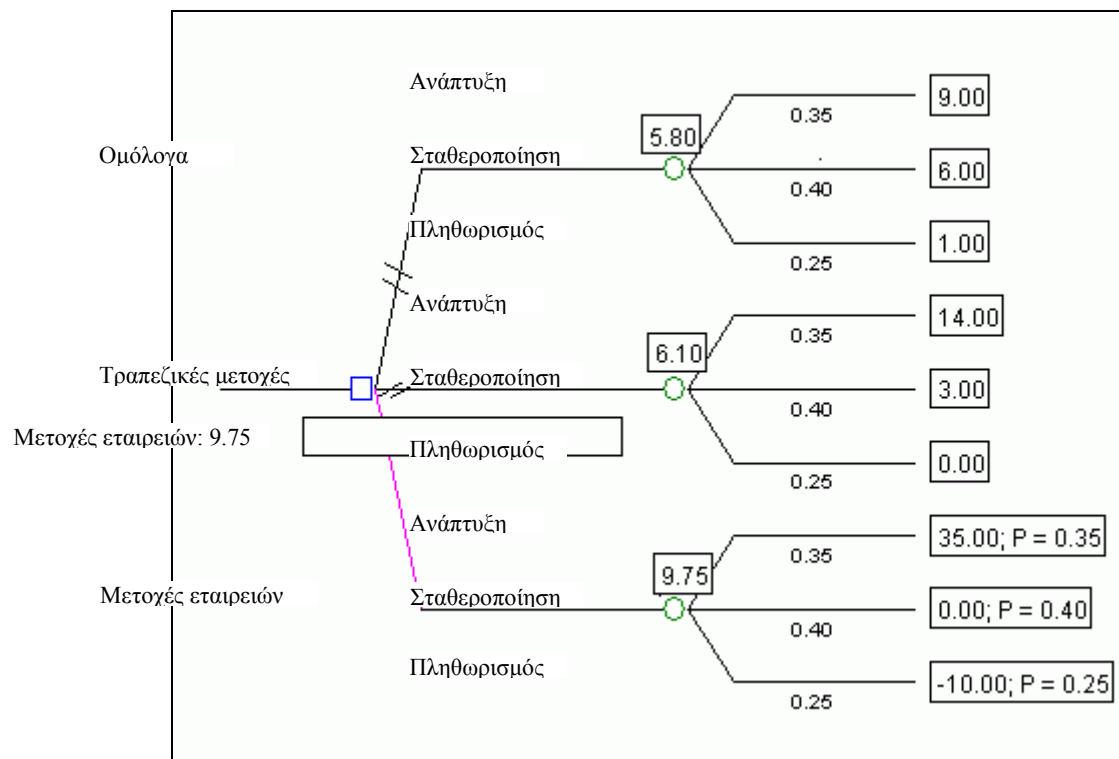
Στο σημείο αυτό ο κ. Γ.Κ. ρώτησε αν έχει κάποιο χρονικό περιθώριο για να εξετάσει τις παραπάνω προτάσεις και ο χρηματιστής του είπε ότι μπορεί να περιμένει μέχρι τη Δευτέρα (ήταν Παρασκευή). Έτσι έφυγε και είχε το σοβαρό δίλημμα τι να διαλέξει. Υποθέστε ότι συναντηθήκατε το Σάββατο και ζήτησε τη γνώμη σας. Τι θα του προτείνατε να κάνει;

Λύση

Οι επιλογές του κ. Γ.Κ. και τα αναμενόμενα κέρδη κάθε μίας φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Υπολογίστηκαν τόσο το ποσοστό απόδοσης όσο και η απόλυτη χρηματική αξία. Η τελευταία δεν είναι απαραίτητη για την κατάστρωση του προβλήματος **μιας και μπορούμε να σχεδιάσουμε το δέντρο απόφασης μόνο με τις αναμενόμενες αποδόσεις** (γιατί;). Διαλέξαμε όμως να την υπολογίσουμε για να αντιληφθούμε το μέγεθος της απόδοσης. Το δέντρο απόφασης που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο πρόβλημα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Αποπληρωμές, EMV του προβλήματος

Κατάσταση οικονομίας	Εναλλακτικές λύσεις			Πιθανότητες
	Ομόλογα	Τραπεζικές μετοχές	Μετοχές εταιρειών	
Ανάπτυξη	9	14	35	0.35
Σταθεροποίηση	6	3	0	0.40
Πληθωρισμός	1	0	-10	0.25
EMV (απόδοση %)	5.8	6.1	9.75	
EMV (χρημ. αξία €)	580	610	975	



Το δέντρο απόφασης για την επένδυση χρημάτων

Βλέπουμε ότι η πλέον συμφέρουσα λύση για τον κ. Γ.Κ. είναι η αγορά του πακέτου των μετοχών εταιρειών, το οποίο επιφέρει μέση απόδοση ίση με 9.75%.

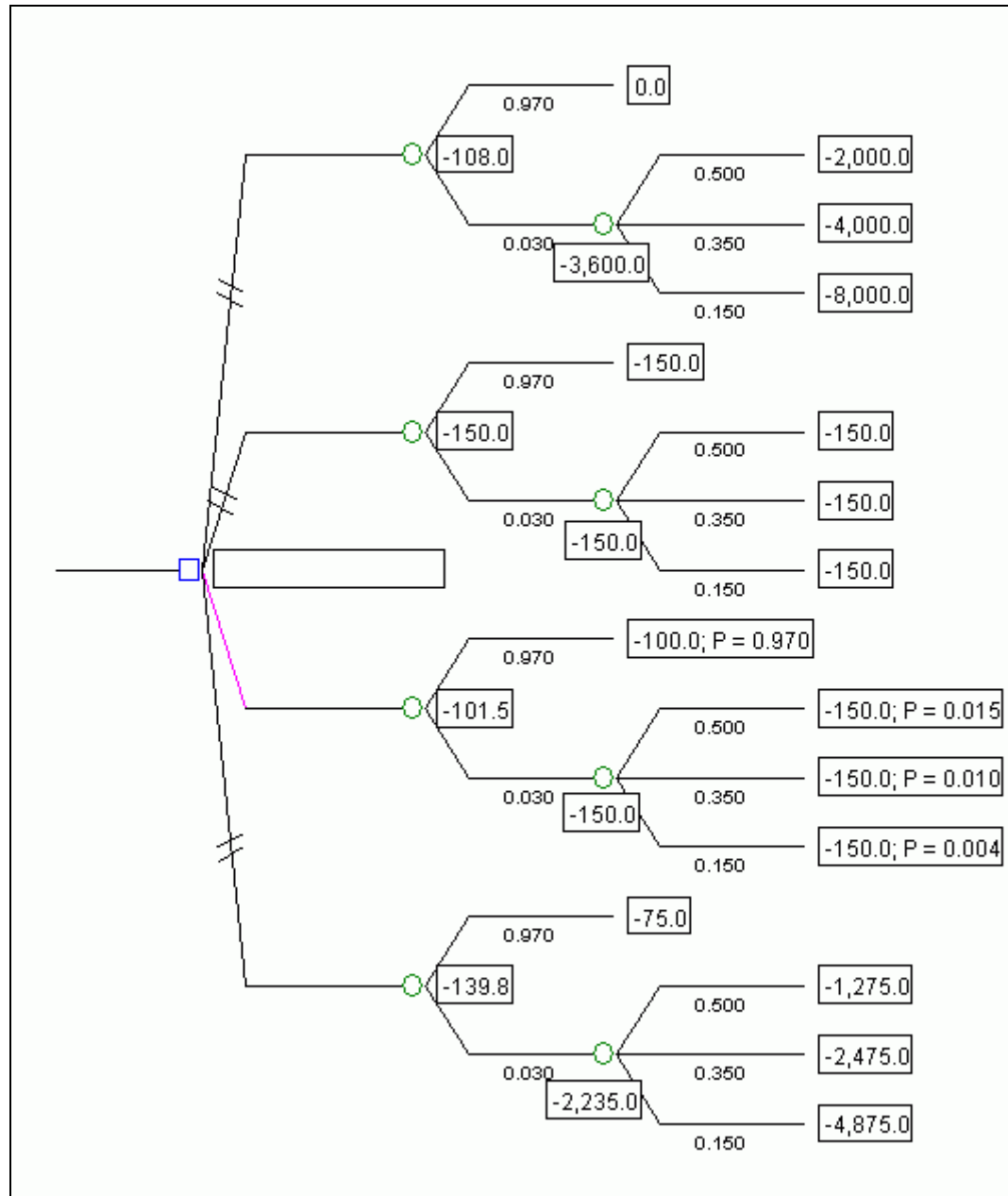
ΑΣΚΗΣΗ 7 (ΑΣΦΑΛΕΙΑ ΣΠΙΤΙΟΥ)

Σκέφτεστε να ασφαλίσετε το σπίτι σας από κλοπή για ένα χρόνο. Εκτιμάτε ότι για να αντικαταστήσετε τα αντικείμενα που έχετε μέσα στο σπίτι θα ξοδέψετε 20000 €. Σύμφωνα με τις τοπικές στατιστικές αναλύσεις, η πιθανότητα κάποιος να παραβιάσει το σπίτι σας είναι 3% για τον επόμενο χρόνο. Σε μια τέτοια περίπτωση οι απώλειες αντικειμένων θα μπορούσαν να είναι το 10%, 20% ή 40% της αξίας όλων των αντικειμένων. Οι πιθανότητες για αυτά τα ενδεχόμενα είναι 0.5, 0.35 και 0.15 αντίστοιχα. Η ασφαλιστική εταιρεία Α, σας προτείνει συμβόλαιο για ένα χρόνο αξίας 150 € και εγγυάται ότι θα αντικαταστήσει όλες τις απώλειες λόγω κλοπής. Μια άλλη εταιρεία Β, σας προτείνει ένα συμβόλαιο 100 € το χρόνο, αλλά σε περίπτωση κλοπής θα πρέπει να πληρώσετε τα πρώτα 50 € και τα υπόλοιπα τα δίνει η ασφαλιστική. Τέλος η εταιρεία Γ, προτείνει ένα ακόμα πιο φτηνό συμβόλαιο, 75 € τον χρόνο, αλλά σε περίπτωση κλοπής θα πληρώσει μόνο το 40% της αξίας των αντικειμένων που εκλάπησαν. Υποθέστε ότι στο χρονικό διάστημα που ισχύει η ασφάλεια μπορεί να συμβεί μόνο μία κλοπή. Σχεδιάστε και λύστε το δέντρο απόφασης.

Λύση

Στο πρόβλημα αυτό πρέπει να αποφασίσουμε αν θα ασφαλίσουμε το σπίτι μας για κλοπή και σε ποια ασφαλιστική εταιρεία. Δηλαδή έχουμε 4 επιλογές: δεν ασφαλίζουμε, ασφαλίζουμε στην εταιρεία Α, ασφαλίζουμε στην εταιρεία Β, ασφαλίζουμε στην εταιρεία Γ. Κάθε μια από 4 αυτές περιπτώσεις έχει 2 τυχαία ενδεχόμενα: γίνεται ή όχι κλοπή. Αν γίνει κλοπή υπάρχουν 3 τυχαία ενδεχόμενα για το ποσοστό της αξίας των κλεμμένων αντικειμένων: 10, 20 ή 40%. Αν κλαπεί το 10%, το 20% ή το 40% της αξίας των αντικειμένων, τότε η ζημία σε απόλυτη αξία είναι $0.1 \cdot 20000 = 2000$ €, 4000 € ή 8000 €, αντίστοιχα. Όσον αφορά την αποζημίωση που δίνει η εταιρεία Γ, αν κλαπεί το 10% η εταιρεία θα αποζημιώσει $2000 \cdot 0.4 = 800$ €, αν κλαπεί το 20%, $4000 \cdot 0.4 = 1600$ € και αν κλαπεί το 40%, $8000 \cdot 0.4 = 3200$ €. Λαμβάνοντας υπ' όψιν όλα τα παραπάνω, το δέντρο απόφασης του προβλήματος φαίνεται στην επόμενη εικόνα.

Από το δέντρο απόφασης βλέπουμε ότι η βέλτιστη λύση είναι να ασφαλίσουμε το σπίτι στην εταιρεία Β. Το κόστος της πολιτικής αυτής είναι 100 €, αν δε γίνει κλοπή (πιθανότητα 97%) και 150 €, εάν γίνει κλοπή (πιθανότητα 3%).



Κλοπή

Απώλεια 20%

Απώλεια 40%

Η λύση του προβλήματος

ΑΣΚΗΣΗ 8 (ΕΠΙΔΗΜΙΑ ΓΡΙΠΗΣ)

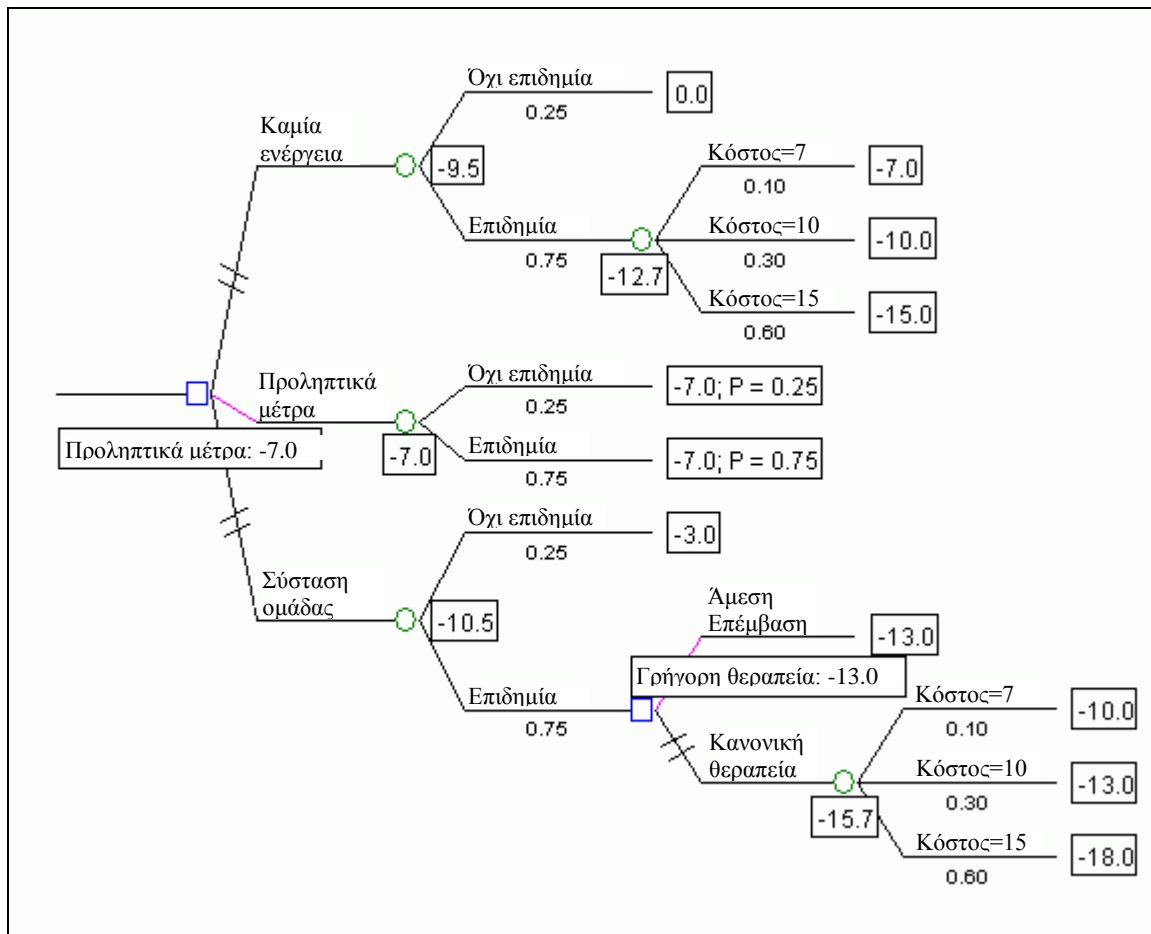
Μία κυβερνητική επιτροπή υγείας εξετάζει τα οικονομικά οφέλη ενός προγράμματος για την πρόληψη επιδημιών γρίπης. Σημειωτέον ότι αν δεν ληφθούν προληπτικά μέτρα και ξεσπάσει η επιδημία τον επόμενο χρόνο, το κόστος για την θεραπεία της ανέρχεται στα 7 εκ. €, με πιθανότητα 0.1, στα 10 εκ. € με πιθανότητα 0.3 και στα 15 εκ. € με πιθανότητα 0.6. Εκτιμάται ότι το κόστος του προγράμματος πρόληψης είναι 7 εκ. €, ενώ η πιθανότητα να εκδηλωθεί επιδημία γρίπης τον επόμενο χρόνο είναι 0.75.

Μια εναλλακτική επιλογή είναι η σύσταση μιας ομάδας ερευνητών η οποία θα ελέγχει προληπτικά τον πληθυσμό με σκοπό να αντιληφθεί την επιδημία στο αρχικό της στάδιο, πριν αυτή εξαπλωθεί. Το κόστος λειτουργίας της ομάδας ανέρχεται στα 3 εκ. €. Εφόσον η ομάδα αντιληφθεί την πιθανότητα εξάπλωσης γρίπης θα χρειαστεί 10 εκ. € για την άμεση αντιμετώπιση αυτής. Βέβαια, υπάρχει και η εναλλακτική του να μην πάρει κανείς προληπτικά μέτρα και να αφήσει την ασθένεια να εκδηλωθεί. Τι θα προτείνετε στην επιτροπή αν στόχος της κυβέρνησης (όπως γίνεται συνήθως...) είναι η εύρεση μίας πολιτικής αντιμετώπισης επιδημιών ελάχιστου κόστους;

Λύση

Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται το δένδρο απόφασης και η βέλτιστη λύση του προβλήματος. Ας περιγράψουμε με λίγα λόγια πως προκύπτει η λύση αυτή.

Οι επιλογές της επιτροπής είναι 3: να μην αναλάβει καμία δράση, να πάρει προληπτικά μέτρα ή να συστήσει ερευνητική ομάδα. Σε όλες τις περιπτώσεις θα έρθει αντιμέτωπη με δύο ενδεχόμενα: να ξεσπάσει ή όχι η επιδημία. Αν δεν ληφθεί κανένα μέτρο και δεν ξεσπάσει επιδημία, τότε δεν έχουμε, προφανώς, κανένα χρηματικό κόστος. Αν όμως ξεσπάσει επιδημία, τότε το κόστος θεραπείας της επιδημίας είναι μία τυχαία μεταβλητή με τιμές 7, 10 ή 15 εκ. €. Αν ληφθούν προληπτικά μέτρα, το κόστος είναι 7 εκ. € είτε ξεσπάσει επιδημία είτε όχι. Σημειωτέον ότι στο δέντρο απόφασης **θα μπορούσαμε κάλλιστα να μην αναλύσουμε περαιτέρω την περίπτωση αυτή**. Τέλος, έχουμε να εξετάσουμε τη δυνατότητα δημιουργίας ομάδας παρακολούθησης του πληθυσμού. Αν δεν ξεσπάσει η επιδημία το κόστος αυτής της ενέργειας θα είναι 3 εκ. € (οφείλεται αποκλειστικά στα έξοδα λειτουργίας της ερευνητικής ομάδας). Αν όμως ξεσπάσει επιδημία, τότε είτε θα ακολουθήσουμε μια πολιτική άμεσης αντιμετώπισης, το κόστος της οποίας είναι 10 εκ. €, είτε θα ακολουθήσουμε την κανονική διαδικασία της οποίας το κόστος είναι τυχαίο.



Η λύση του προβλήματος

Από το δέντρο απόφασης βλέπουμε ότι η καλύτερη λύση, από άποψη κόστους, είναι να ληφθούν προληπτικά μέτρα.. Η πολιτική αυτή έχει το μικρότερο ρίσκο συγκριτικά με τις υπόλοιπες επιλογές, μιας και τα απαιτούμενα χρήματα είναι τα ίδια ασχέτως του τελικού αποτελέσματος.

ΑΣΚΗΣΗ 9 (ΑΓΟΡΑ ΑΓΡΟΤΕΜΑΧΙΩΝ)

Εργάζεστε σε μια εταιρεία, η οποία φιλοδοξεί να χτίσει μια μεγάλη ξενοδοχειακή μονάδα σε μια πόλη. Στην ίδια πόλη πρόκειται να γίνει σύντομα μία δημοπρασία κατασκευής ενός νέου αεροδρομίου. Οι υποψηφίες περιοχές είναι δύο, η A και η B. Η εταιρεία επιθυμεί να αγοράσει τις απαραίτητες εκτάσεις για την κατασκευή του ξενοδοχείου πριν την ανακοίνωση της τοποθεσίας του αεροδρομίου, έτσι ώστε το κόστος των εκτάσεων αυτών να είναι χαμηλό.

Η εκτίμηση της εταιρείας είναι ότι με πιθανότητα 40% το αεροδρόμιο θα δημιουργηθεί στην περιοχή A και με πιθανότητα 60% στην περιοχή B. Το κόστος αγοράς της απαραίτητης έκτασης για την κατασκευή της ξενοδοχειακής μονάδας ανέρχεται στα 18 εκ. € για την περιοχή A και στα 12 εκ. € για την περιοχή B. Η εταιρεία εξετάζει παράλληλα και το ενδεχόμενο να αγοράσει εκτάσεις και στις δύο περιοχές, οπότε το κόστος ανέρχεται στα 30 εκ. €. Τα κέρδη της εταιρείας από την κατασκευή της ξενοδοχειακής μονάδας εξαρτώνται άμεσα από την τοποθεσία του αεροδρομίου. Όλες οι πιθανές περιπτώσεις και τα αντίστοιχα κέρδη (σε εκ €) φαίνονται στον επόμενο πίνακα.

		Περιοχή κατασκευής αεροδρομίου	
		A	B
Περιοχές κατασκευής ξενοδοχείου	A	31	0
	B	10	23
	A & B	35	29

Ποια είναι η βέλτιστη στρατηγική για την εταιρεία; Ας υποθέσουμε ότι μπορούσατε να πληροφορηθείτε την τοποθεσία που θα χτιστεί το αεροδρόμιο έναντι κάποιου χρηματικού ποσού. Μέχρι τι ποσό θα σας συνέφερε να πληρώσετε για να αποκτήσετε την πληροφορία αυτή;

Λύση

Το δέντρο απόφασης του προβλήματος αυτού είναι απλό, μιας και οι επιλογές μας είναι 4: να αγοράσουμε αγροτεμάχια στην περιοχή A, στην περιοχή B, και στις δύο περιοχές ή να μην προχωρήσουμε σε καμία αγορά γης. Όλες οι περιπτώσεις αγοράς αγροτεμαχίων έχουν δύο πιθανά ενδεχόμενα, την κατασκευή του αεροδρομίου στην περιοχή A ή στην περιοχή B. Να επισημάνουμε ότι στις αποπληρωμές έχουν αφαιρεθεί τα κόστη αγοράς αγροτεμαχίων και κατασκευής του ξενοδοχείου. Από το δέντρο απόφασης βλέπουμε ότι τα μεγαλύτερο αναμενόμενο κέρδος επιτυγχάνεται με την αγορά της περιοχής B για την κατασκευή του ξενοδοχείου.

Προσοχή!!!!

Στην περίπτωση όπου η εταιρία αποφασίζει να αγοράσει μια έκταση στην περιοχή A και στη συνέχεια το αεροδρόμιο χτιστεί στην περιοχή B, τότε οι τελικές αποπληρωμές (κέρδος – κόστος) είναι -18 εκ. € και όχι -12. Επίσης, στην περίπτωση που η εταιρία αποφασίζει να αγοράσει μια έκταση στην περιοχή B και το αεροδρόμιο χτιστεί στην περιοχή A, τότε οι τελικές αποπληρωμές είναι -2 και όχι -8.

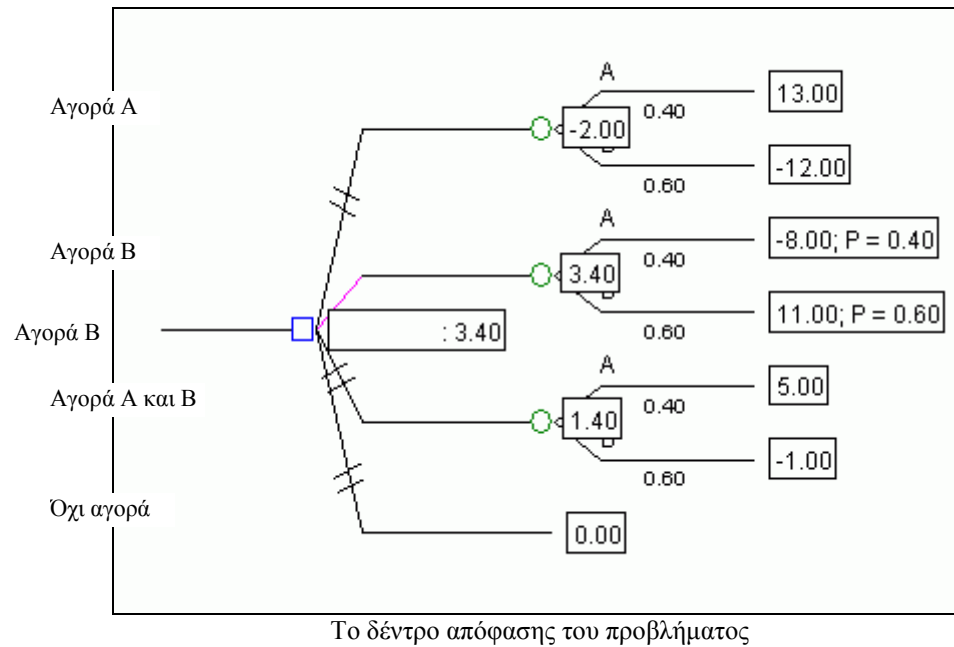
Τρόπος σκέψης: π.χ. όταν η εταιρία προβεί στην αγορά έκτασης στην περιοχή A, μη γνωρίζοντας σίγουρα που θα χτιστεί το αεροδρόμιο, τότε πληρώνει 18 εκ. € (κόστος). Μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, αποφασίζεται αν θα γίνει το αεροδρόμιο στην περιοχή A ή στην περιοχή B. Αν γίνει στην περιοχή A, τότε τα μικτά κέρδη της εταιρίας (χωρίς το κόστος αγοράς της έκτασης) ανέρχονται σε 31 εκ. €. Αντίστοιχα, αν χτιστεί το αεροδρόμιο στην περιοχή B, τα κέρδη της εταιρίας ανέρχονται σε 0 εκ. €. Κατά αυτόν τον τρόπο υπολογίζουμε τις τελικές αποπληρωμές σε κάθε περίπτωση.

Για να υπολογίσουμε την αξία της τέλειας πληροφόρησης σκεφτόμαστε ως εξής: Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε ότι το αεροδρόμιο θα κατασκευαστεί στην περιοχή A. Τότε εμείς θα επιλέγαμε την περιοχή A, μιας και μας η επιλογή επιφέρει τα μεγαλύτερα κέρδη (13 εκ. €). Στην περίπτωση που το αεροδρόμιο κατασκευαστεί στην περιοχή B, η εταιρεία θα όφειλε να αγοράσει την ίδια περιοχή, κίνηση που της εξασφαλίζει 11 εκ. €. Έχοντας λοιπόν επίγνωση της τοποθεσίας του αεροδρομίου, τα αναμενόμενα μας κέρδη είναι ίσα με:

$$13*0.4+11*0.6=11.8 \text{ εκ. €}$$

Η αξία της τέλειας πληροφορίας προκύπτει από την αναμενόμενη τιμή έχοντας την πληροφορία μείον την αναμενόμενη τιμή χωρίς την πληροφορία. Δηλαδή:

$$11.8-3.4=8.4 \text{ εκ. €}$$



Συνεπώς, δε συμφέρει την εταιρεία να πληρώσει πάνω από 8.4 εκ. € για να μάθει την ακριβή θέση του αεροδρομίου.

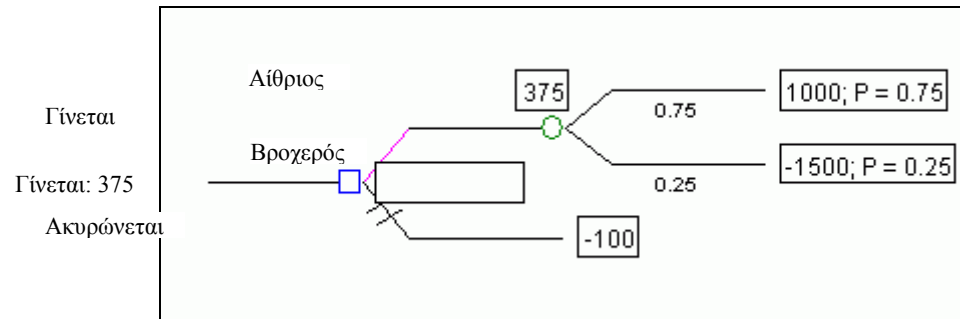
ΑΣΚΗΣΗ 10 (ΣΥΝΑΥΛΙΑ 'ROLLING STONES' ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ)

Το διεθνούς φήμης αγγλικό συγκρότημα πρόκειται να δώσει συναυλία στην Ελλάδα, εν όψη των Ολυμπιακών Αγώνων του 2004. Τα έσοδα που θα προκύψουν από την παράσταση εξαρτώνται άμεσα από τον καιρό. Συγκεκριμένα, αν ο καιρός είναι βροχερός, η συναυλία θα έχει μεγάλη **ζημία** της τάξεως του 1.500.000 €, ενώ αν ο καιρός είναι αίθριος τα κέρδη αναμένεται να ανέλθουν στο 1.000.000 €. Υποθέστε ότι τα μόνα ενδεχόμενα είναι αίθριος ή βροχερός καιρός. Ο manager του συγκροτήματος έχει το δικαίωμα να ακυρώσει την παράσταση, αλλά τότε χάνει την προκαταβολή προσυμφώνησης της εκδήλωσης με την Επιτροπή Διεξαγωγής των Ολυμπιακών Αγώνων. Το ύψος της προκαταβολής ανέρχεται στα 100.000 €. Τα ιστορικά δεδομένα δείχνουν ότι στις 18 Σεπτεμβρίου μέσα στον 20ο Αιώνα έχει βρέξει συνολικά 25 διαφορετικές χρονιές.

Από τη σκοπιά του manager του συγκροτήματος, ποία είναι η απόφαση που μεγιστοποιεί τα αναμενόμενα κέρδη; Έστω ότι υπάρχει η δυνατότητα αγοράς πληροφορίας από έγκυρο διεθνή μετεωρολογικό δορυφόρο, του οποίου, όμως, η ακρίβεια πρόβλεψης κυμαίνεται. Έτσι, ο δορυφόρος προβλέπει σωστά τον βροχερό καιρό σε ποσοστό 90% και τον αίθριο καιρό σε ποσοστό 80%. Αν ο manager έχει αυτήν την πρόβλεψη στα χέρια του, τι στρατηγική πρέπει να ακολουθήσει για τη μεγιστοποίηση του αναμενόμενου κέρδους; Πόσα θα ήταν διατεθειμένος να πληρώσει προκειμένου να έχει πρόσβαση στην πληροφορία αυτή;

Λύση

Οι επιλογές που υπάρχουν είναι δύο: να γίνει ή να μη γίνει η συναυλία. Στην πρώτη περίπτωση, έχουμε τα ενδεχόμενα ο καιρός να είναι αίθριος ή βροχερός. Βάσει αυτών, το δέντρο απόφασης φαίνεται στην επόμενη εικόνα (τα ποσά είναι χιλ €).



Το δέντρο απόφασης του αρχικού προβλήματος

Από το δέντρο βλέπουμε ότι η καλύτερη απόφαση είναι να γίνει η συναυλία, αν και η κίνηση αυτή ενέχει μεγάλο ρίσκο (συγκρίνετε τις πιθανότητες και τα χρηματικά ποσά που αντιστοιχούν σε κάθε σενάριο).

Στην περίπτωση που ο manager πληρώσει για να μάθει τον καιρό από το μετεωρολογικό δορυφόρο, θα πρέπει να υπολογίσουμε τις **αναθεωρημένες** πιθανότητες για τον καιρό, βάσει του τύπου του Bayes.

Συμβολίζουμε με:

- ΠΑ: Πρόβλεψη αίθριου καιρού
- ΠΒ: πρόβλεψη βροχερού καιρού
- Α: Αίθριος καιρός
- Β: βροχερός καιρός.

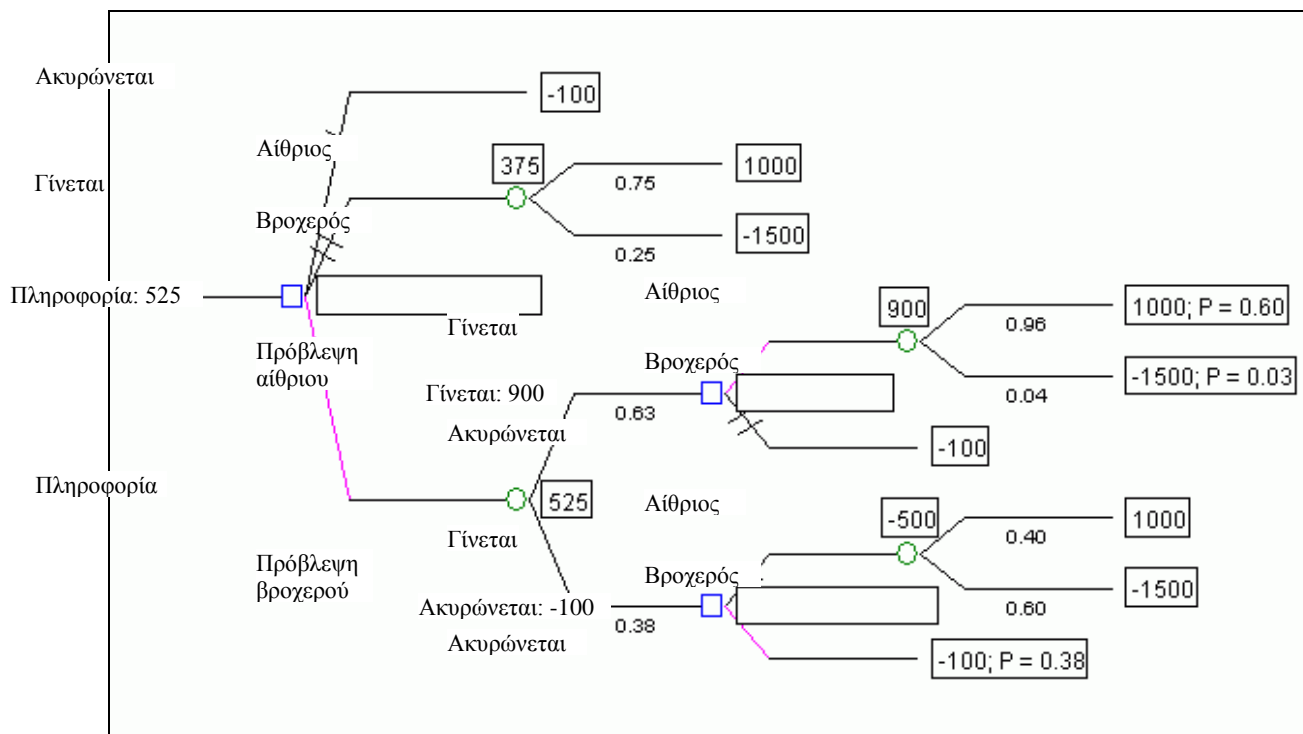
Από τα δεδομένα του προβλήματος γνωρίζουμε ότι $P(\Pi A | A) = 0.8$ και ότι $P(\Pi B | B) = 0.9$. Άρα $P(\Pi B | A) = 1 - 0.8 = 0.2$ και $P(\Pi A | B) = 1 - 0.9 = 0.1$. Επίσης, έχουμε ότι $P(\Pi A) = P(\Pi A | A)P(A) + P(\Pi A | B)P(B) = 0.8 * 0.75 + 0.1 * 0.25 = 0.625$ και $P(\Pi B) = 1 - P(\Pi A) = 0.375$. Οι πιθανότητες που χρειαζόμαστε είναι οι:

- $P(A | \Pi A) = \frac{P(\Pi A | A)P(A)}{P(\Pi A)} = \frac{0.8 * 0.75}{0.625} = 0.96$

- $P(A | \Pi B) = \frac{P(\Pi B | A)P(A)}{P(\Pi B)} = \frac{0.2 * 0.75}{0.375} = 0.4$

Άρα $P(B | \Pi A) = 1 - P(A | \Pi A) = 1 - 0.96 = 0.04$ και $P(B | \Pi B) = 1 - P(A | \Pi B) = 0.6$.

Βάσει των παραπάνω, κατασκευάζουμε το δέντρο απόφασης με τη δυνατότητα αγοράς της πληροφορίας του καιρού από τον δορυφόρο (βλ. παρακάτω σχήμα, τα ποσά είναι σε χιλ. €).



Το δέντρο απόφασης με την πληροφορία από τον δορυφόρο

Όπως βλέπουμε, η βέλτιστη στρατηγική για το ενδεχόμενο της πληροφόρησης από τον δορυφόρο είναι να πάρουμε την πληροφορία. Αν η πρόβλεψη του καιρού είναι ευνοϊκή, τότε προχωράμε σε συναυλία, κάτι που δεν πρέπει να γίνει αν η πρόβλεψη είναι αρνητική. Αν έπρεπε να πληρώσει ο μάνατζερ για την πληροφορία αυτή, το maximum ποσό που θα ήταν διατεθειμένος να δώσει είναι ίσο με $525000 - 375000 = 150000$ €.

ΑΣΚΗΣΗ 11

Μια εταιρία αξιοποίησης κοιτασμάτων πολύτιμων μετάλλων εξετάζει διάφορα τμήματα γης με απώτερο στόχο να ανακαλύψει αν υπάρχουν πολύτιμα μέταλλα ή όχι. Αυτό το χρονικό διάστημα, η εταιρία έχει την επιλογή να αγοράσει ένα τμήμα γης για 3,000,000 €.

Αν προβεί σε αγορά της γης, τότε η εταιρία θα πραγματοποιήσει μια γεωλογική έρευνα. Αποτελέσματα προηγούμενων ερευνών έχουν δείξει μια γεωλογική έρευνα για τέτοιου είδους κομμάτια γης κοστίζει περίπου 1,000,000 € και περιέχουν σημαντικά αποθέματα μετάλλων, όπως:

- Μαγγάνιο με πιθανότητα 0.01
- Χρυσό με πιθανότητα 0.0005
- Ασήμι με πιθανότητα 0.002

Τα αποτελέσματα της γεωλογικής έρευνας μπορούν να δείξουν την ύπαρξη ενός μόνο είδους μετάλλου, και μόνο.

Αν βρεθεί μαγγάνιο, τότε το κομμάτι γης μπορεί να πωληθεί για 30,000,000 €, αν βρεθεί χρυσός για 250,000,000 € και αν βρεθεί ασήμι για 150,000,000 €.

Η εταιρία έχει και την επιλογή να πληρώσει 750,000 € για την άδεια διεξαγωγής δοκιμών 3 ημερών, προτού να αποφασίσει αν θα προβεί στην αγορά ή όχι. Τέτοιου είδους έρευνες μπορούν να δώσουν μόνο προκαταρκτικές ενδείξεις σχετικά με την ύπαρξη κοιτασμάτων μετάλλων και προηγούμενη εμπειρία έχει δείξει ότι αυτές οι έρευνες κοστίζουν 250,000 € και προβλέπουν την ύπαρξη μετάλλων στο 0.50 των περιπτώσεων. Αν αυτές οι έρευνες δείξουν την ύπαρξη σημαντικών κοιτασμάτων μετάλλων, τότε η πιθανότητα ύπαρξης μαγγανίου, χρυσού και ασημιού αυξάνεται σε 0.03, 0.02 και 0.01 αντίστοιχα. Εάν όμως δεν δείξει την ύπαρξη κάποιου μετάλλου, τότε οι πιθανότητες ύπαρξης μειώνονται σε 0.0075, 0.0004 και 0.00175 αντίστοιχα για τα τρία μέταλλα.

Τι θα συμβουλευάτε την εταιρία να κάνει;

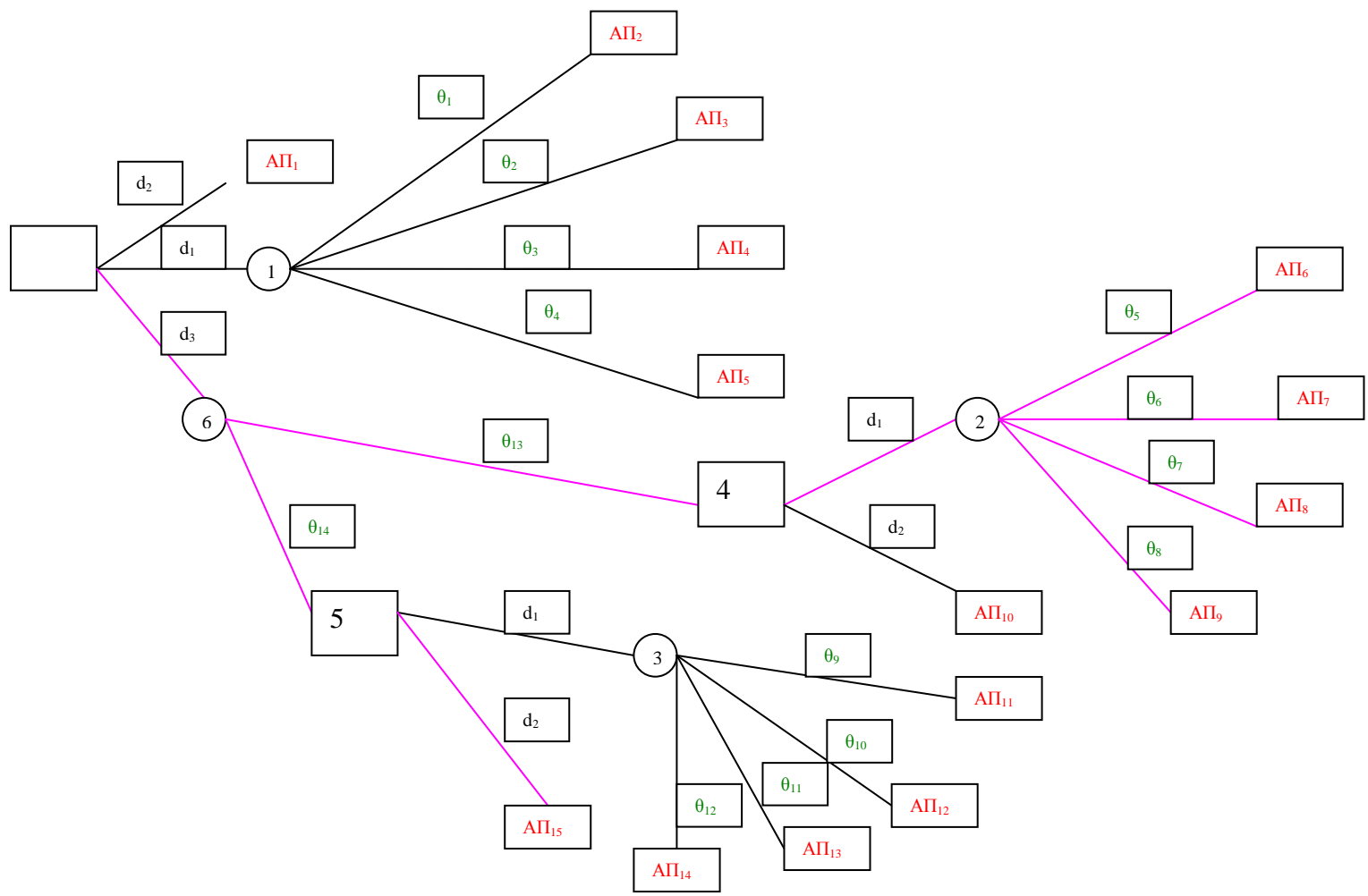
Μια εταιρία παρόμοιων συμφερόντων με την εταιρία του προβλήματος μας, διατίθεται να πληρώσει τα μισά κόστη που σχετίζονται με το συγκεκριμένο κομμάτι γης και ως αντάλλαγμα να αποκτήσει τα μισά έσοδα. Με βάση αυτήν την πληροφορία, τι θα συμβουλευάτε την εταιρία να κάνει;

ΛΥΣΗ

Το πρώτο βήμα στη διαδικασία επίλυσης είναι να καταγράψουμε ποια είναι τα γεγονότα / αποφάσεις που θα πρέπει να πάρει η εταιρία, και ποια είναι τα πιθανά ενδεχόμενα:

- Αποφάσεις:
 - d_1 : αγορά γης
 - d_2 : μη-αγορά γης
 - d_3 : διεξαγωγή δοκιμών
 - d_4 : αγορά γης σε ενδεχόμενο επιτυχούς αποτελέσματος της δοκιμής
 - d_5 : μη-αγορά γης σε ενδεχόμενο επιτυχούς αποτελέσματος της δοκιμής
 - d_6 : αγορά γης σε ενδεχόμενο μη-επιτυχούς αποτελέσματος της δοκιμής
 - d_7 : μη-αγορά γης σε ενδεχόμενο μη-επιτυχούς αποτελέσματος της δοκιμής
- Ενδεχόμενα:
 - θ_1 : εύρεση μαγγανίου $\sim P(\theta_1) = 0.01$
 - θ_2 : εύρεση χρυσού $\sim P(\theta_2) = 0.0005$
 - θ_3 : εύρεση ασημιού $\sim P(\theta_3) = 0.002$
 - θ_4 : μη-εύρεση μετάλλων $\sim P(\theta_4) = 1 - P(\theta_1) - P(\theta_2) - P(\theta_3) = 0.9875$
 - θ_5 : εύρεση μαγγανίου, μετά από επιτυχή δοκιμή $\sim P(\theta_5) = 0.03$
 - θ_6 : εύρεση χρυσού, μετά από επιτυχή δοκιμή $\sim P(\theta_6) = 0.02$
 - θ_7 : εύρεση ασημιού, μετά από επιτυχή δοκιμή $\sim P(\theta_7) = 0.01$
 - θ_8 : μη-εύρεση μετάλλων, μετά από επιτυχή δοκιμή $\sim P(\theta_8) = 1 - P(\theta_5) - P(\theta_6) - P(\theta_7) = 0.94$
 - θ_9 : εύρεση μαγγανίου, μετά από μη-επιτυχή δοκιμή $\sim P(\theta_9) = 0.0075$
 - θ_{10} : εύρεση χρυσού, μετά από μη-επιτυχή δοκιμή $\sim P(\theta_{10}) = 0.0004$
 - θ_{11} : εύρεση ασημιού, μετά από μη-επιτυχή δοκιμή $\sim P(\theta_{11}) = 0.00175$
 - θ_{12} : μη-εύρεση μετάλλων, μετά από μη-επιτυχή δοκιμή $\sim P(\theta_{12}) = 1 - P(\theta_9) - P(\theta_{10}) - P(\theta_{11}) = 0.99035$
 - θ_{13} : επιτυχία δοκιμών $\sim P(\theta_{13}) = 0.5$
 - θ_{14} : μη-επιτυχία δοκιμών $\sim P(\theta_{14}) = 0.5$

Σε επόμενο βήμα μπορούμε να κατασκευάσουμε το δέντρο απόφασης:



Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις τελικές αποπληρωμές (ΑΠ), οι οποίες προκύπτουν σε κάθε διαδρομή του δέντρου:

- ΑΠ₁: 0 €
- ΑΠ₂: $-3,000,000-1,000,000+30,000,000 = 26,000,000$ €
- ΑΠ₃: $-3,000,000-1,000,000+250,000,000 = 246,000,000$ €
- ΑΠ₄: $-3,000,000-1,000,000+150,000,000 = 146,000,000$ €
- ΑΠ₅: $-3,000,000-1,000,000 = -4,000,000$ €
- ΑΠ₆: $-750,000-250,000-3,000,000-1,000,000+30,000,000 = 25,000,000$ €
- ΑΠ₇: $-750,000-250,000-3,000,000-1,000,000+250,000,000 = 245,000,000$ €
- ΑΠ₈: $-750,000-250,000-3,000,000-1,000,000+150,000,000 = 145,000,000$ €
- ΑΠ₉: $-750,000-250,000-3,000,000-1,000,000 = -5,000,000$ €
- ΑΠ₁₀: $-750,000-250,000 = -1,000,000$ €
- ΑΠ₁₁ = ΑΠ₆
- ΑΠ₁₂ = ΑΠ₇
- ΑΠ₁₃ = ΑΠ₈
- ΑΠ₁₄ = ΑΠ₉
- ΑΠ₁₅ = ΑΠ₁₀

Στο σημείο αυτό μπορούμε να επιλύσουμε το δέντρο, εφόσον πρώτα υπολογίσουμε τις αναμενόμενες χρηματικές αξίες σε κάθε κόμβο τύχης:

- $EMV_1 = 0,01*26,000,000+0,0005*246,000,000+0,002*146,000,000 + 0,9875*(-4,000,000) = -3,275,000$ €
- $EMV_2 = 0,03*25,000,000+0,02*245,000,000+0,01*145,000,000 + 0,94*(-5,000,000) = 2,400,000$ €
- $EMV_3 = 0,0075*25,000,000+0,0004*245,000,000+0,00175*145,000,000 + 0,99035*(-5,000,000) = -4,412,500$ €
- $EMV_4 = EMV_2 = 2,400,000$ €
- $EMV_5 = ΑΠ_{15} = -1,000,000$ €
- $EMV_6 = 0,5*2,400,000+0,5* (-1,000,000) = 700,000$ €

Επομένως, η λύση η οποία προτείνεται στην εταιρία (ροζ χρώμα κλάδων του δέντρου) είναι η ακόλουθη: η εταιρία θα πρέπει να προβεί σε δοκιμαστικές έρευνες 3 ημερών, για να εξετάσει την ποιότητα της γης. Αν οι έρευνες είναι επιτυχημένες, θα πρέπει να αγοράσει την έκταση της γης και να προβεί σε αξιοποίηση της. Σε αντίθετη περίπτωση, ανεπιτυχών δοκιμών, δε θα προβεί σε αγορά και αξιοποίηση της γης. Επίσης, στην περίπτωση επιμερισμού του κόστους με μια άλλη εταιρία (κατά το ήμισυ), τα αποτελέσματα θα είναι τα ίδια με πριν, καθότι το μόνο που αλλάζει είναι οι τελικές αποπληρωμές (όλες οι τιμές διαιρούνται με το 2). Παρόλαυτα, σε τέτοια περίπτωση, η εταιρία μοιράζει το ρίσκο με τη νέα εταιρία, κάτι το οποίο είναι θετικό.

ΑΣΚΗΣΗ 12

Η εταιρία στην οποία εργάζεστε ως σύμβουλοι επιχειρήσεων προσπαθεί να αποφασίσει αν θα υποβάλλει προσφορά για ένα συμβόλαιο ή όχι. Η προετοιμασία της προσφοράς θα κοστίσει 10,000 €. Υπάρχει 0.50 πιθανότητα να γίνει αποδεκτή η προσφορά, με την εισαγωγή της σε λίστα προσφορών κι άλλων εταιριών, και 0.50 πιθανότητα να απορριφθεί εξαρχής.

Στην περίπτωση όπου η προσφορά εισέλθει στη λίστα με τις υπόλοιπες προσφορές, θα πρέπει να δοθούν επιπρόσθετες πληροφορίες από την πλευρά της εταιρίας, κόστους 5,000 €. Μετά από αυτό το στάδιο, η προσφορά θα γίνει αποδεκτή ή όχι.

Η εταιρία εκτιμά ότι τα κόστη εργασίας και πρώτων υλών ανέρχονται σε 127,000 €. Επιπλέον, η εταιρία σκέφτεται να υποβάλλει 3 εναλλακτικές τιμές για την προσφορά της: 155,000 €, 170,000 € και 190,000 € αντίστοιχα. Οι πιθανότητες αποδοχής της προσφοράς σύμφωνα με τις παραπάνω τιμές είναι 0.90, 0.75 και 0.35 αντίστοιχα.

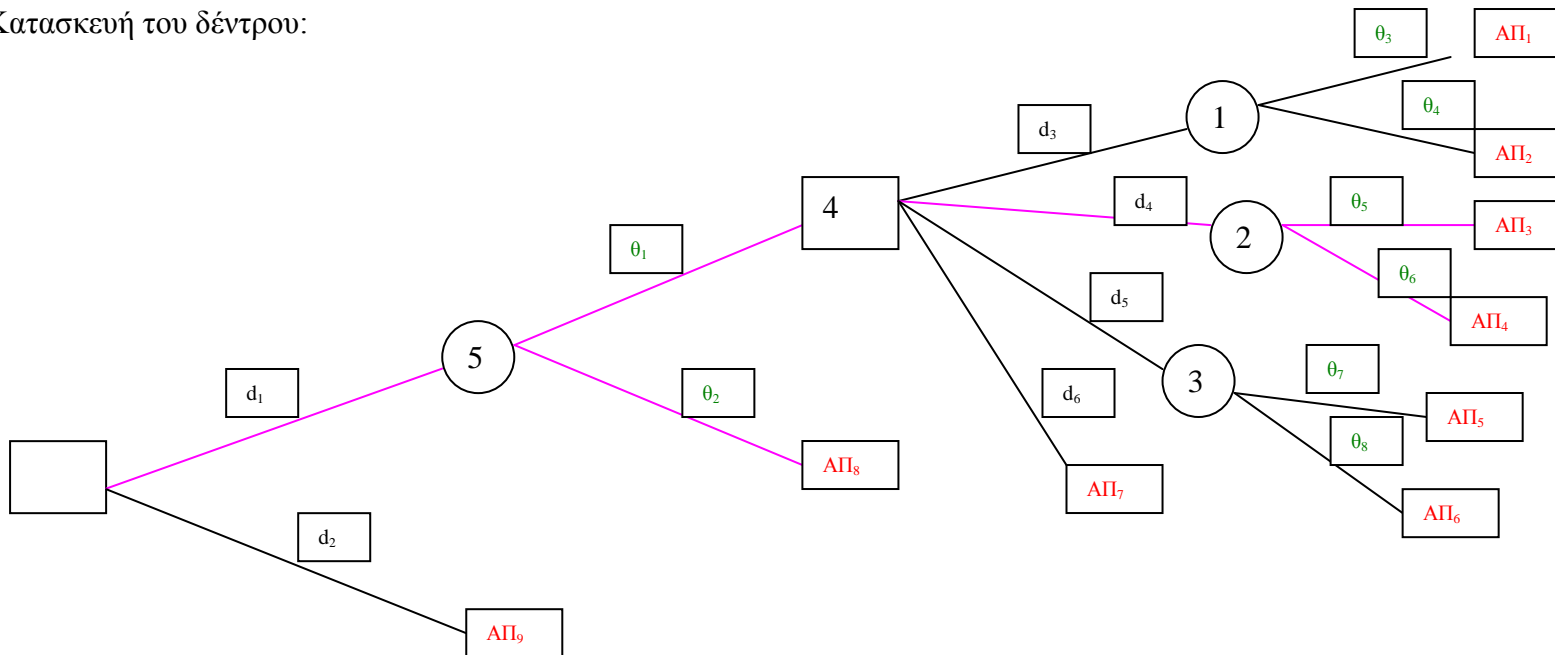
Τι προτείνετε να κάνει η εταιρία σας;

ΛΥΣΗ

- Αποφάσεις:
 - ο d_1 : υποβολή πρότασης
 - ο d_2 : μη-υποβολή πρότασης
 - ο d_3 : σε περίπτωση αποδοχής της πρότασης, υποβολή προσφοράς σε τιμή 190,000 €

- d_4 : σε περίπτωση αποδοχής της πρότασης, υποβολή προσφοράς σε τιμή 170,000 €
- d_5 : σε περίπτωση αποδοχής της πρότασης, υποβολή προσφοράς σε τιμή 135,000 €
- d_6 : σε περίπτωση αποδοχής της πρότασης, μη - υποβολή προσφοράς
- Ενδεχόμενα:
 - θ_1 : αποδοχή πρότασης $\sim P(\theta_1) = 0,5$
 - θ_2 : μη-αποδοχή πρότασης $\sim P(\theta_2) = 0,5$
 - θ_3 : σε περίπτωση αποδοχής της πρότασης, αποδοχή της προσφοράς σε τιμή 190,000 € $\sim P(\theta_3) = 0,35$
 - θ_4 : σε περίπτωση αποδοχής της πρότασης, μη-αποδοχή της προσφοράς σε τιμή 190,000 € $\sim P(\theta_4) = 0,65$
 - θ_5 : σε περίπτωση αποδοχής της πρότασης, αποδοχή της προσφοράς σε τιμή 170,000 € $\sim P(\theta_5) = 0,75$
 - θ_6 : σε περίπτωση αποδοχής της πρότασης, μη-αποδοχή της προσφοράς σε τιμή 170,000 € $\sim P(\theta_6) = 0,25$
 - θ_7 : σε περίπτωση αποδοχής της πρότασης, αποδοχή της προσφοράς σε τιμή 135,000 € $\sim P(\theta_7) = 0,90$
 - θ_8 : σε περίπτωση αποδοχής της πρότασης, μη-αποδοχή της προσφοράς σε τιμή 135,000 € $\sim P(\theta_8) = 0,10$

Κατασκευή του δέντρου:



Οι τελικές αποπληρωμές της κάθε διαδρομής υπολογίζονται ως ακολούθως:

- $ΑΠ_1 = -10,000 - 5,000 - 127,000 + 190,000 = 48,000 \text{ €}$
- $ΑΠ_2 = -10,000 - 5,000 = -15,000 \text{ €}$
- $ΑΠ_3 = -10,000 - 5,000 - 127,000 + 170,000 = 28,000 \text{ €}$
- $ΑΠ_4 = -10,000 - 5,000 = -15,00 \text{ €}$
- $ΑΠ_5 = -10,000 - 5,000 - 127,000 + 15500 = 13,000 \text{ €}$
- $ΑΠ_6 = -10,000 - 5,000 = -15,000 \text{ €}$
- $ΑΠ_7 = -10,000 - 5,000 = -15,000 \text{ €}$
- $ΑΠ_8 = -10,000 = -10,000 \text{ €}$
- $ΑΠ_9 = 0 \text{ €}$

Επιλύουμε το δέντρο, υπολογίζοντας τις αναμενόμενες χρηματικές αξίες:

- $EMV_1 = 0,35 * 48,000 + 0,65 * (-15,000) = 7,050 \text{ €}$
- $EMV_2 = 0,75 * 28,000 + 0,25 * (-15,000) = 17,250 \text{ €}$
- $EMV_3 = 0,90 * 13,000 + 0,10 * (-15,000) = 10,200 \text{ €}$
- $EMV_4 = EMV_2$
- $EMV_5 = 0,5 * 17,250 + 0,50 * (-10,000) = 3,625 \text{ €}$

Επομένως, η εταιρία αποφασίζει να υποβάλλει πρόταση για τον διαγωνισμό. Σε περίπτωση αποδοχής της πρότασης, η εταιρία θα πρέπει να αποφασίσει να υποβάλλει μια προσφορά του ύψους των 170,000 €.

ΑΣΚΗΣΗ 13

Η εταιρία Arthrodax έχει μια πρόταση από την εταιρία Ranger Sound για μια έκτακτη παραγγελία αγοράς 100 τεμαχίων από μια ειδική έκδοση του μίκτη ήχου Arthrodax SoundScreamer, που παράγει η Arthrodax, με τιμή αγοράς 5,000€ το τεμάχιο. Για να δημιουργηθεί αυτή η ειδική έκδοση του προϊόντος, απαιτείται ένα σταθερό κόστος 100,000€ για το σχεδιασμό των τροποποιήσεων, ανεξάρτητα από τον αριθμό των τεμαχίων της παραγγελίας. Επιπλέον, θα απαιτηθούν 2,000€/τεμάχιο για την κατασκευή των κυκλωμάτων του προϊόντος. Λόγω του γεγονότος ότι η Arthrodax δεν αξιοποιεί την παραγωγική της δυναμικότητα αυτήν την περίοδο, η ειδική παραγγελία από την εταιρία Ranger Sound είναι ιδιαίτερα ελκυστική.

Παρόλαυτα, η νέα έκδοση του προϊόντος δε χωράει στις συνηθισμένες θήκες. Έτσι, η Arthrodax θα πρέπει να αποφασίσει σχετικά με την απόκτηση ή την κατασκευή των θηκών αυτών. Μια ειδική θήκη κοστίζει 500€/τεμάχιο, αλλά η Arthrodax έχει την επιλογή να αγοράσει μια συσκευή θερμοπ्रेसαρίσματος πλαστικού, με στόχο να κατασκευάσει τις θήκες η ίδια. Το μηχάνημα αυτό κοστίζει 20,000€, και υπάρχει 0.6 πιθανότητα να κατασκευαστούν επιτυχώς οι θήκες. Σε περίπτωση αποτυχίας κατασκευής των θηκών, τότε η Arthrodax θα πρέπει να αγοράσει τις θήκες με την προαναφερόμενη τιμή. Σε περίπτωση επιτυχίας κατά την κατασκευή των θηκών, το κόστος κατασκευής θα είναι 60€/θήκη. Τέλος, ανεξάρτητα της απόφασης σχετικά με τις θήκες, θα κοστίζει στην εταιρία 20€/τεμάχιο για να ενσωματώσει τα κυκλώματα στις νέες θήκες. Δυστυχώς, δεν υπάρχει ευκαιρία για δοκιμή του μηχανήματος κατασκευής θηκών.

Ως εξωτερικός σύμβουλος επιχειρήσεων, τι θα προτείνατε στην εταιρία Arthrodax;

Σε συνέχεια του προηγούμενου προβλήματος λήψης απόφασης που αντιμετωπίζει η εταιρία Arthrodax, η εταιρία Ranger Sound έρχεται να ορίσει νέα δεδομένα στο ζήτημα, τα οποία αφορούν τον ακριβή αριθμό τεμαχίων της παραγγελίας. Πιο συγκεκριμένα, με πιθανότητα 0.35 η εταιρία Ranger Sound θα χρειαστεί 100 τεμάχια από το προϊόν, και με 0.65 50 τεμάχια. Αν η Arthrodax αποφασίσει να δεχτεί την παραγγελία, η

Ranger Sound θα πληρώσει 6,000€/τεμάχιο στην περίπτωση των 50 τεμαχίων και 5,000€/τεμάχιο στην περίπτωση των 100 τεμαχίων. Παρόλαυτα, η Arthrodax θα πρέπει να αποφασίσει αν θα αγοράσει το μηχάνημα κατασκευής θηκών προτού της γνωστοποιηθεί πόσα τεμάχια θα χρειαστεί η Ranger Sound.

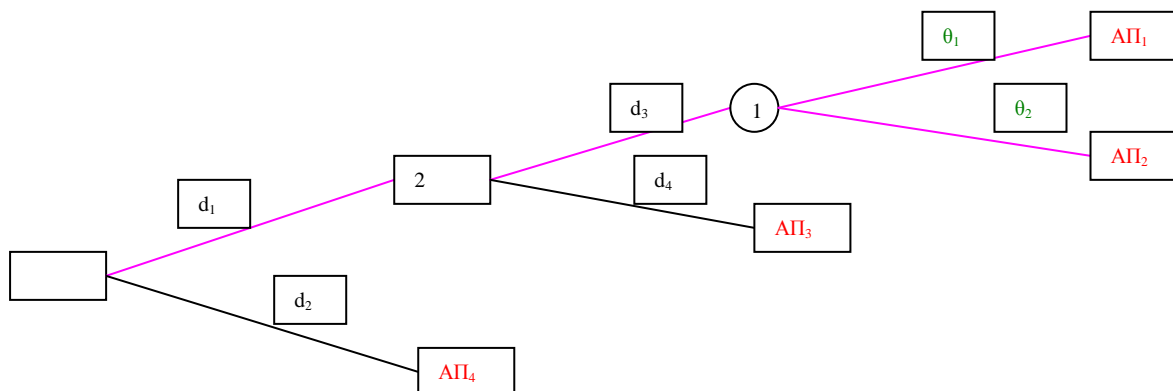
Με βάση τα νέα δεδομένα, τι θα προτείνατε στην εταιρία;

Επίσης, πως θα αντιδρούσε η εταιρία Arthrodax εάν γνώριζε πρώτα πόσα τεμάχια θα επιθυμούμε η Ranger Sound κι έπειτα αποφάσιζε αν θα αγόραζε το μηχάνημα παραγωγής θηκών ή όχι;

ΛΥΣΗ

- Αποφάσεις:
 - o d_1 : αποδοχή παραγγελίας
 - o d_2 : μη-αποδοχή παραγγελίας
 - o d_3 : αγορά μηχανήματος κατασκευής θηκών
 - o d_4 : αγορά θηκών
- Ενδεχόμενα:
 - o θ_1 : επιτυχής κατασκευή θηκών από το μηχάνημα $\sim P(\theta_1) = 0,6$
 - o θ_2 : μη-επιτυχής κατασκευή θηκών από το μηχάνημα $\sim P(\theta_2) = 0,4$

Κατασκευή δέντρου:



Υπολογισμός τελικών αποπληρωμών σε κάθε διαδρομή του δέντρου:

- ΑΠ₁: $-100,000 - 2,000 * 100 - 20,000 - 60 * 100 - 20 * 100 + 5,000 * 100 = 172,000 \text{ €}$
- ΑΠ₂: $-100,000 - 2,000 * 100 - 20,000 - 500 * 100 - 20 * 100 + 5,000 * 100 = 128,000 \text{ €}$
- ΑΠ₃: $-100,000 - 2,000 * 100 - 500 * 100 - 20 * 100 + 5,000 * 100 = 148,000 \text{ €}$
- ΑΠ₄: 0 €

Επίλυση του δέντρου βάσει αναμενόμενης χρηματικής αποπληρωμής:

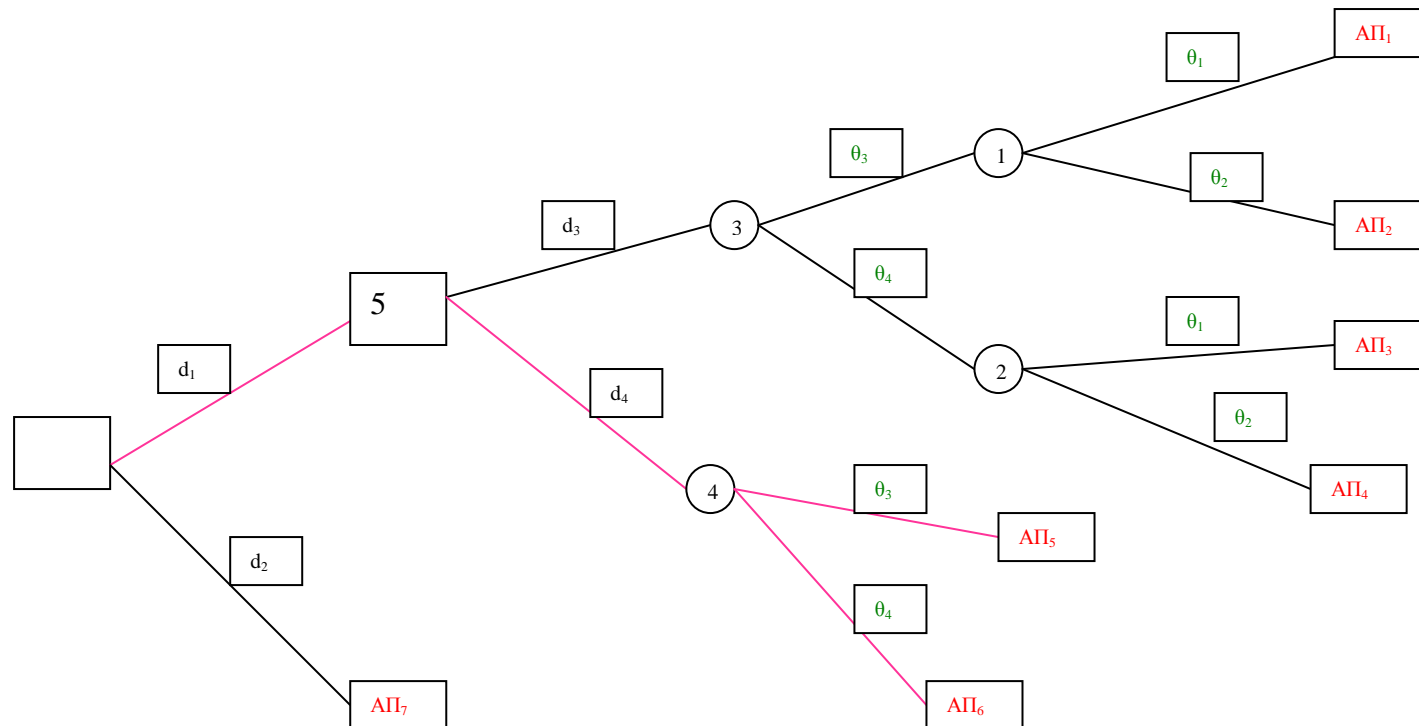
- $EMV_1 = 0,6 * 172,000 + 0,4 * 128,000 = 154,400 \text{ €}$

Η εταιρία θα πρέπει να αποδεχτεί την ειδική παραγγελία κατασκευής μικτών ήχου. Επίσης, θα πρέπει να προβεί στην αγορά μηχανήματος για την κατασκευή θηκών.

Όσον αφορά τη συνέχεια της άσκησης, οι αποφάσεις που πρέπει να πάρει η εταιρία δε διαφοροποιούνται με πρην. Παρόλαυτα, έχουμε μια μικρή τροποποίηση στα πιθανά ενδεχόμενα:

- Ενδεχόμενα:
 - θ_1 : επιτυχής κατασκευή θηκών από το μηχάνημα $\sim P(\theta_1) = 0,6$
 - θ_2 : μη-επιτυχής κατασκευή θηκών από το μηχάνημα $\sim P(\theta_2) = 0,4$
 - θ_3 : παραγγελία ύψους 100 τεμαχίων από Ranger Sound $\sim P(\theta_3) = 0,35$
 - θ_4 : παραγγελία ύψους 50 τεμαχίων από Ranger Sound $\sim P(\theta_4) = 0,65$

Κατασκευή του τροποποιημένου δέντρου:



Οι αποπληρωμές στην τροποποιημένη περίπτωση είναι:

- $ΑΠ_1 = -100,000 - 20,000 - 2,000 * 100 - 60 * 100 - 20 * 100 + 5,000 * 100 = 172,000 \text{ €}$
- $ΑΠ_2 = -100,000 - 20,000 - 2,000 * 100 - 500 * 100 - 20 * 100 + 5,000 * 100 = 128,000 \text{ €}$
- $ΑΠ_3 = -100,000 - 20,000 - 2,000 * 50 - 60 * 50 - 20 * 50 + 6,000 * 50 = 76,000 \text{ €}$
- $ΑΠ_4 = -100,000 - 20,000 - 2,000 * 50 - 500 * 50 - 20 * 50 + 6,000 * 50 = 54,000 \text{ €}$
- $ΑΠ_5 = -100,000 - 2,000 * 100 - 500 * 100 - 20 * 100 + 5,000 * 100 = 148,000 \text{ €}$
- $ΑΠ_6 = -100,000 - 2,000 * 50 - 500 * 50 - 20 * 50 + 6,000 * 50 = 74,000 \text{ €}$
- $ΑΠ_7 = 0 \text{ €}$

Η επίλυση του δέντρου γίνεται με τη βοήθεια των αναμενόμενων χρηματικών αξιών:

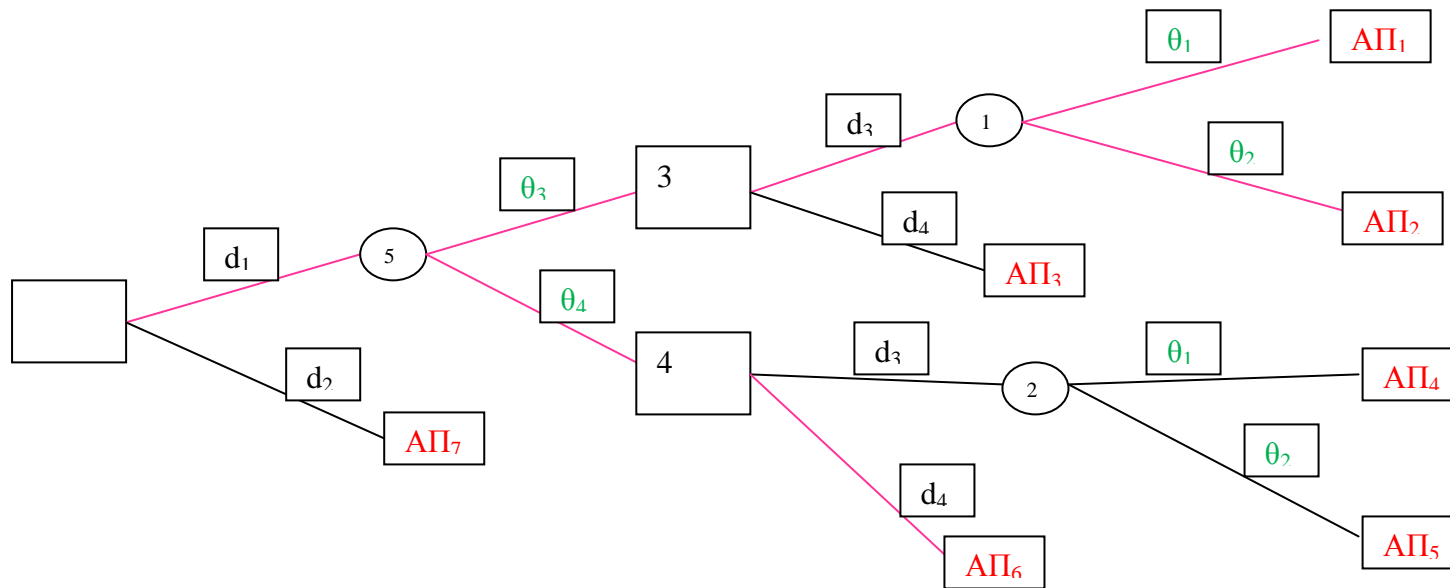
- $EMV_1 = 0,6 * 178,000 + 0,4 * 128,000 = 154,400 \text{ €}$

- $EMV_2 = 0,6*76,000+0,4*54,000 = 67,200 \text{ €}$
- $EMV_3 = 0,35*154,400+0,65*67,200 = 97,720 \text{ €}$
- $EMV_4 = 0,35*148,000+0,65*74,000 = 99,900 \text{ €}$

Επομένως, η εταιρία θα αποδεχτεί την παραγγελία και σε αυτήν την περίπτωση. Η διαφορά με πριν, όμως, είναι ότι δε θα αγοράσει το μηχάνημα για την κατασκευή των θηκών αλλά θα αγοράσει απευθείας τις θήκες για τη νέα έκδοση των προϊόντων.

Τέλος, παρακάτω παραθέτουμε την λύση στην οποία οδηγούμαστε αν λάβουμε υπόψη μας την τελευταία κατάσταση που περιγράφεται στην άσκηση μας. Τόσο οι αποφάσεις, όσο και τα ενδεχόμενα παραμένουν τα ίδια.

Το δέντρο απόφασης παρουσιάζεται παρακάτω:



Οι αποπληρωμές στην προκειμένη περίπτωση είναι οι ακόλουθες:

- $ΑΠ_1 = -100,000 - 2,000 \cdot 100 - 20,000 - 60 \cdot 100 - 20 \cdot 100 + 5,000 \cdot 100 = 172,000 \text{ €}$
- $ΑΠ_2 = -100,000 - 2,000 \cdot 100 - 20,000 - 500 \cdot 100 - 20 \cdot 100 + 5,000 \cdot 100 = 128,000 \text{ €}$

- $ΑΠ_3 = -100,000 - 2,000 * 100 - 500 * 100 - 20 * 100 + 5,000 * 100 = 148,000 \text{ €}$
- $ΑΠ_4 = -100,000 - 2,000 * 50 - 20,000 - 60 * 50 - 20 * 50 + 6,000 * 50 = 76,000 \text{ €}$
- $ΑΠ_5 = -100,000 - 2,000 * 50 - 20,000 - 500 * 50 - 20 * 50 + 6,000 * 50 = 54,000 \text{ €}$
- $ΑΠ_6 = -100,000 - 2,000 * 50 - 500 * 50 - 20 * 50 + 6,000 * 50 = 74,000 \text{ €}$
- $ΑΠ_7 = 0 \text{ €}$

Σε αυτό το σημείο, υπολογίζουμε τις αναμενόμενες χρηματικές αξίες:

- $EMV_1 = 0,6 * 172,000 + 0,4 * 128,000 = 154,400 \text{ €}$
- $EMV_2 = 0,6 * 76,000 + 0,4 * 54,000 = 67,200 \text{ €}$
- $EMV_5 = 0,35 * 154,400 + 0,65 * 74,000 = 102,140 \text{ €}$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η εταιρία θα αποδεχτεί την παραγγελία για παραγωγή της ειδικής έκδοσης του προϊόντος της. Στο ενδεχόμενο όπου η Ranger Sound αποφασίσει να ζητήσει 100 τεμάχια, η Arthrodax θα αγοράσει μηχάνημα παρασκευής θηκών. Σε αντίθετη περίπτωση, όπου η Ranger Sound απαιτήσει 50 τεμάχια, η Arthrodax θα αγοράσει απευθείας θήκες.

ΑΣΚΗΣΗ 14

Η εταιρία Aba Manufacturing έχει συμφωνήσει να προμηθεύσει την Zyz Electronics με κυκλώματα υπολογιστή υπό τους παρακάτω όρους: 100,000 κυκλώματα θα παραδοθούν σε ένα μήνα, και η Zyz έχει το δικαίωμα να απαιτήσει κι άλλα 100,000 κυκλώματα τα οποία θα παραδοθούν σε 3 μήνες, εφόσον υπάρχει μια ειδοποίηση 30 ημερών στην Aba. Η Zyz θα πληρώσει 5€/κύκλωμα. Το σύστημα κοστολόγησης της Aba είναι το ακόλουθο: υπάρχει ένα σταθερό κόστος για κάθε παρτίδα ανεξαρτήτου μεγέθους, 250,000€ και επιπλέον υπάρχει ένα κόστος παραγωγής 2€/κύκλωμα ανεξάρτητα από το μέγεθος της παρτίδας. Η απόφαση που πρέπει να πάρει η Aba είναι αν θα κατασκευάσει εξαρχής και τα 200,000 κυκλώματα ή αν θα κατασκευάσει τα 100,000 τώρα, και τα υπόλοιπα 100,000 αν η Zyz εξασκήσει το δικαίωμα αγοράς τους. Γίνεται κατανοητό ότι αν η Aba κατασκευάσει όλα τα κυκλώματα εξαρχής, και η Aba δεν εξασκήσει το δικαίωμα για την αγορά των επιπλέον τεμαχίων, τότε αυτά χάνονται. Η Aba πιστεύει ότι η πιθανότητα εξάσκησης του δικαιώματος από την Zyz είναι 0.50.

Τι θα συμβουλευάτε να κάνει η Αβα;

ΛΥΣΗ

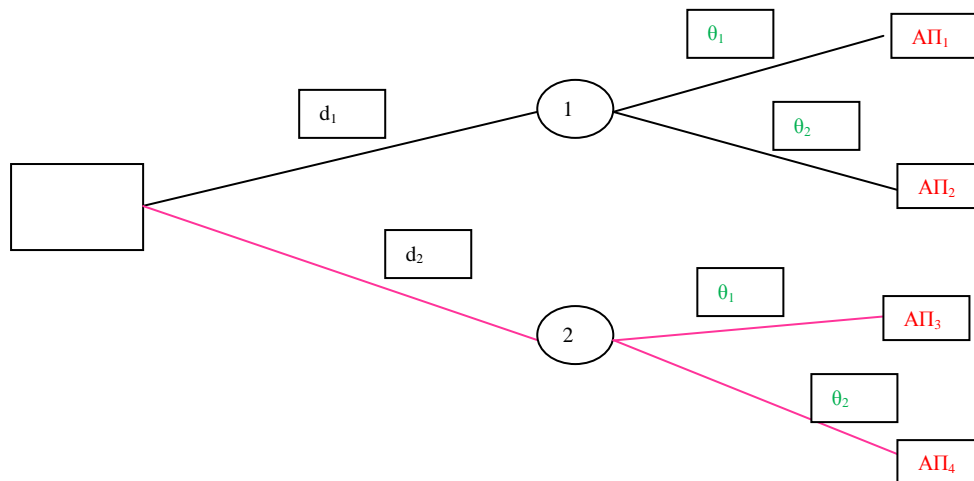
Οι αποφάσεις (γεγονότα) του συγκεκριμένου προβλήματος είναι οι ακόλουθες:

- d_1 : κατασκευή 100,000 τεμαχίων
- d_2 : κατασκευή 200,000 τεμαχίων

Τα πιθανά ενδεχόμενα είναι τα εξής:

- θ_1 : εξάσκηση δικαιώματος για επιπλέον τεμάχια $\sim P(\theta_1) = 0,5$
- θ_2 : μη-εξάσκηση δικαιώματος για επιπλέον τεμάχια $\sim P(\theta_1) = 0,5$

Το δέντρο απόφασης στην προκειμένη περίπτωση παρουσιάζεται παρακάτω:



Οι τελικές αποπληρωμές σε κάθε διαδρομή υπολογίζονται ως ακολούθως:

- $ΑΠ_1 = (-250,00 - 2 \cdot 100,000 + 5 \cdot 100,000) + (-250,000 - 2 \cdot 100,000 + 5 \cdot 100,000) = 100,000 \text{ €}$
- $ΑΠ_2 = (-250,00 - 2 \cdot 100,000 + 5 \cdot 100,000) = 50,000 \text{ €}$
- $ΑΠ_3 = -250,00 - 2 \cdot 200,000 + 5 \cdot 200,000 = 350,000 \text{ €}$
- $ΑΠ_4 = -250,00 - 2 \cdot 200,000 + 5 \cdot 100,000 = -150,000 \text{ €}$

Οι αναμενόμενες χρηματικές αξίες στους κόμβους τύχης είναι οι εξής:

- $EMV_1 = 0,5 \cdot 100,000 + 0,5 \cdot 50,000 = 75,000 \text{ €}$
- $EMV_2 = 0,5 \cdot 350,000 + 0,5 \cdot (-150,000) = 100,000 \text{ €}$

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα, η εταιρία θα πρέπει να παράγει εξαρχής 200,000 τεμάχια, ανεξάρτητα από τι θα κάνει η εταιρία Zyz.

Σε αυτό το σημείο κρίνεται σκόπιμο να κάνουμε μια συζήτηση σχετικά με τον υπολογισμό των αποπληρωμών.

- Η εταιρία Aba έχει σταθερό κόστος παραγωγής, το οποίο είναι ανεξάρτητο από το μέγεθος των προϊόντων που πρόκειται να παραχθούν (batch size). Αυτό σημαίνει ότι είτε παράγει 100,000 τεμάχια είτε 200,000, το κόστος αυτό δε μεταβάλλεται. Αυτό σχετίζεται με την αποπληρωμή ΑΠ₁. Η διαδρομή που ακολουθούμε στο δέντρο για να καταλήξουμε σε αυτή την αποπληρωμή είναι η ακόλουθη: η εταιρία Aba αποφασίζει να παράγει αρχικά 100,000 τεμάχια. Έπειτα, η εταιρία Zyz αποφασίζει να εξασκήσει το δικαίωμα της για επιπλέον 100,000 τεμάχια. Επομένως, η εταιρία Aba θα πρέπει να ενεργοποιήσει εκ νέου τον εξοπλισμό της ,3 μήνες μετά την παραγωγή των αρχικών 100,000 τεμαχίων, για να ικανοποιήσει το αίτημα της Zyz.
- Κάτι τέτοιο δεν παρατηρείται στις αποπληρωμές 3 και 4, όπου εξαρχής παράγει 200,000 τεμάχια, θέτοντας μια μόνο φορά τον παραγωγικό της εξοπλισμό σε λειτουργία.

ΑΣΚΗΣΗ 15

Μια εταιρία κατασκευάζει κάποια κομμάτια προϊόντος, τα οποία τα τοποθετεί σε παρτίδες των 150 τεμαχίων προτού τα διαθέσει στην αγορά. Όμως, αντιμετωπίζει το πρόβλημα ότι μερικά από τα επιμέρους τεμάχια μπορεί να είναι ελαττωματικά, πράγμα που μπορεί να επηρεάσει την ποιότητα της συνολικής παρτίδας. Η εταιρία θα πρέπει να αποφασίσει αν θα εφαρμόσει μια διαδικασία εξονυχιστικού ελέγχου σε ολόκληρη την παρτίδα (σε κάθε ένα από τα 150 τεμάχια ξεχωριστά) προτού το θέσει στην αγορά ή όχι. Το 80% των παρτίδων είναι καλής ποιότητας.

Επιπλέον, από ιστορικά στοιχεία, προκύπτει ότι σε καλής ποιότητας παρτίδες, τα ελαττωματικά τεμάχια ανέρχονται στο 5%, ενώ σε κακής ποιότητας παρτίδες, τα ελαττωματικά τεμάχια ανέρχονται σε 25%. Αν η εταιρία αποφασίσει να προχωρήσει στον έλεγχο, τότε το κόστος ανά τεμάχιο θα είναι 10 €. Αν δεν πραγματοποιηθεί ο έλεγχος, και προκύψουν ελαττωματικά τεμάχια, τότε το κόστος αποκατάστασης ανά τεμάχιο θα είναι 100 €.

Επίσης, δίνεται η ευκαιρία στην εταιρία να πραγματοποιήσει έναν προκαταρκτικό έλεγχο σε ένα δείγμα, ο οποίος κοστίζει 125 €.

Τι θα συμβουλευάτε την εταιρία να πράξει;

ΛΥΣΗ

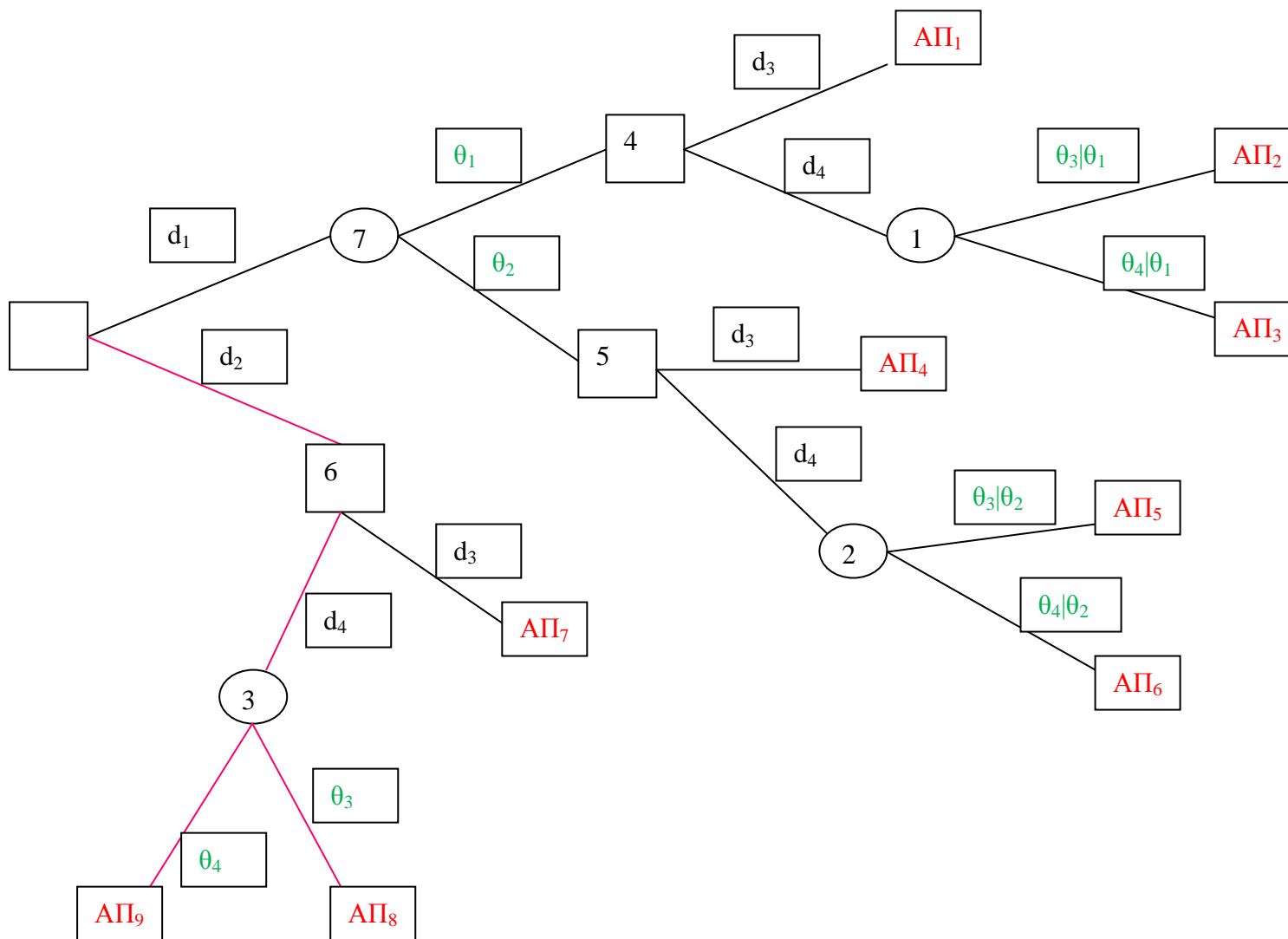
Οι αποφάσεις που καλείται να πάρει η εταιρία είναι οι ακόλουθες:

- d_1 : πραγματοποίηση προκαταρκτικού ελέγχου
- d_2 : μη-πραγματοποίηση προκαταρκτικού ελέγχου
- d_3 : πραγματοποίηση βασικού ελέγχου
- d_4 : μη-πραγματοποίηση βασικού ελέγχου

Τα πιθανά ενδεχόμενα είναι τα ακόλουθα:

- θ_1 : ο προκαταρκτικός έλεγχος δίνει ελαττωματικό αντικείμενο / δείγμα $\sim P(\theta_1) = ?$
- θ_2 : ο προκαταρκτικός έλεγχος δε δίνει ελαττωματικό αντικείμενο / δείγμα $\sim P(\theta_2) = ?$
- θ_3 : ο βασικός έλεγχος δίνει παρτίδα καλής ποιότητας $\sim P(\theta_3) = 0,80$
- θ_4 : ο βασικός έλεγχος δίνει παρτίδα κακής ποιότητας $\sim P(\theta_4) = 0,20$
- $\theta_1|\theta_3$: ελαττωματικό αντικείμενο δεδομένου ότι η παρτίδα ήταν καλής ποιότητας $\sim P(\theta_1|\theta_3) = 0,05$
- $\theta_2|\theta_3$: μη-ελαττωματικό αντικείμενο δεδομένου ότι η παρτίδα ήταν καλής ποιότητας $\sim P(\theta_2|\theta_3) = 0,95$
- $\theta_1|\theta_4$: ελαττωματικό αντικείμενο δεδομένου ότι η παρτίδα ήταν κακής ποιότητας $\sim P(\theta_1|\theta_4) = 0,25$
- $\theta_2|\theta_4$: μη-ελαττωματικό αντικείμενο δεδομένου ότι η παρτίδα ήταν κακής ποιότητας $\sim P(\theta_2|\theta_4) = 0,75$
- $\theta_3|\theta_1$: παρτίδα καλής ποιότητας δεδομένου ότι το αντικείμενο ήταν ελαττωματικό $\sim P(\theta_3|\theta_1) = ?$
- $\theta_4|\theta_1$: παρτίδα κακής ποιότητας δεδομένου ότι το αντικείμενο ήταν ελαττωματικό $\sim P(\theta_4|\theta_1) = ?$
- $\theta_3|\theta_2$: παρτίδα καλής ποιότητας δεδομένου ότι το αντικείμενο δεν ήταν ελαττωματικό $\sim P(\theta_3|\theta_2) = ?$
- $\theta_4|\theta_2$: παρτίδα κακής ποιότητας δεδομένου ότι το αντικείμενο δεν ήταν ελαττωματικό $\sim P(\theta_4|\theta_2) = ?$

Για να έχουμε μια καλύτερη εικόνα του προβλήματος, κατασκευάζουμε το δέντρο απόφασης:



Σύμφωνα με το θεώρημα της ολικής πιθανότητας:

$$P(\theta_1) = P(\theta_1|\theta_3)*P(\theta_3) + P(\theta_1|\theta_4)*P(\theta_4) = 0,05*0,8+0,25*0,2 = 0,09$$

$$P(\theta_2) = 1 - P(\theta_1) = 0,91$$

Σύμφωνα με τον κανόνα του Bayes

$$P(\theta_3|\theta_1) = P(\theta_1|\theta_3)*P(\theta_3)/P(\theta_1) = 0,444$$

$$P(\theta_4|\theta_1) = 0,566$$

$$P(\theta_3|\theta_2) = P(\theta_2|\theta_3)*P(\theta_3)/P(\theta_2) = 0,835$$

$$P(\theta_4|\theta_2) = 0,165$$

Οι τελικές αποπληρωμές είναι οι ακόλουθες:

- $ΑΠ_1 = -125-10*150 = -1,625 \text{ €}$
- $ΑΠ_2 = -125-100*150*0,05 = -875 \text{ €}$
- $ΑΠ_3 = -125-100*150*0,25 = -3,875 \text{ €}$
- $ΑΠ_4 = -125-10*150 = -1625 \text{ €}$
- $ΑΠ_5 = -125-100*150*0,05 = -875 \text{ €}$
- $ΑΠ_6 = -125-100*150*0,25 = -3,875 \text{ €}$
- $ΑΠ_7 = -10*150 = -1,500 \text{ €}$
- $ΑΠ_8 = -100*150*0,05 = -750 \text{ €}$
- $ΑΠ_9 = -100*150*0,25 = -3,750 \text{ €}$

Για να βρούμε τη βέλτιστη απόφαση για την εταιρία, θα πρέπει να υπολογίσουμε τις αναμενόμενες χρηματικές αξίες (ζημιές) πρώτα:

- $EMV_1 = 0,444*(-875)+0,566*(-3,875) = -2,285.75€$
- $EMV_2 = 0,835*(-875)+0,165*(-3,875) = -1,370€$
- $EMV_3 = 0,8*(-750)+0,2*(-3,750) = -1,350€$
- $EMV_4 = ΑΠ_1$
- $EMV_5 = EMV_2$
- $EMV_6 = EMV_3$
- $EMV_7 = 0,09*(-1,625)+0,91*(-1,370) = -1,392.95 €$

Επιλέγουμε τη λύση που μας δίνει τη μικρότερη χρηματική αξία, στην προκειμένη περίπτωση τη μικρότερη χρηματική ζημιά αφού μιλάμε για κόστος. Η εταιρία θα πρέπει να μην κάνει τον προκαταρκτικό έλεγχο, έπειτα να μην προβεί ούτε στο βασικό έλεγχο και να προχωρήσει στη χρήση των παρτίδων τεμαχίων που παράγει.