

## Θέμα 1

Έχουμε τρεις εναλλακτικές επένδυσης των κερδών μιας εταιρείας και η απόφασή εξαρτάται από τις γενικότερες συνθήκες της οικονομίας (αναπτυσσόμενη, σταθερή, επιβραδυνόμενη), για τις οποίες δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστούν πιθανότητες, μπορεί με τη βοήθεια ειδικών να φτιαχτεί όμως ένας αξιόπιστος πίνακας αναμενόμενων αποπληρωμών κατά περίπτωση όπως φαίνεται πιο κάτω:

Εναλλακτική Επιβραδυνόμενη	Οικονομία		
	Αναπτυσσόμενη	Σταθερή	
Ομόλογα (bonds)	40	45	5
Μετοχές (stocks)	70	30	-13
Αμοιβαία κεφάλαια (mutual funds)	53	45	-5

Χρησιμοποιήστε τα κριτήρια maximin, maximax, Hurwicz (για δείκτη αισιοδοξίας  $\alpha = 0.5$  – εξηγήστε τι σημαίνει), minmax regret (διαφυγόντος κέρδους) και Laplace. Στο τέλος δώστε και μια τελική απάντηση σε ποια εναλλακτική επένδυσης καταλήγετε και γιατί (με μια πρόταση).

### Λύση

#### Maximin

Το χειρότερο της 1ης γραμμής είναι: 5

Το χειρότερο της 2ης γραμμής είναι: -13

Το χειρότερο της 3ης γραμμής είναι: -5

Το καλύτερο από τα 3 αυτά χειρότερα κάθε γραμμής είναι το 5 → **Ομόλογα (bonds)**

#### Maximax

Αναζητούμε τώρα το καλύτερο κάθε γραμμής και επιλέγουμε το καλύτερο όλων:

$\max \{45, 70, 53\} = 70 \rightarrow$  **Μετοχές (stocks)**

## Min-max Regret

Βρίσκουμε το καλύτερο ανά στήλη και το αφαιρούμε από τα άλλα της στήλης. Στον νέο πίνακα διαφυγόντος κέρδους που προκύπτει βρίσκουμε το μέγιστο κάθε γραμμής και επιλέγουμε το ελάχιστο αυτών που είναι το ελάχιστο διαφυγόν κέρδος.

Πίνακας διαφυγόντος κέρδους

30	0	0	→ max 1ης γραμμής : 30
0	15	18	→ max 2ης γραμμής : 18
17	0	10	→ max 3ης γραμμής : 17

$\min \{30, 18, 17\} = 17 \rightarrow$  **Αμοιβαία κεφάλαια (mutual funds)**

## Hurwicz με $\alpha=0.5$

Θα υπολογίζουμε για κάθε γραμμή την ποσότητα  $0.5 * (\min \text{ γραμμής}) + 0.5 * (\max \text{ γραμμής})$  και θα επιλέξουμε την μεγαλύτερη όλων

$$H(\text{bonds}) = 0.5 * (5) + 0.5 * (45) = 25$$

$$H(\text{stocks}) = 0.5 * (70) + 0.5 * (-13) = 28.5$$

$$H(\text{mutual funds}) = 0.5 * (53) + 0.5 * (-5) = 24$$

$\max \{25, 28.5, 24\} = 28.5 \rightarrow$  **Μετοχές (stocks)**

## Laplace

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα ισοπίθανα και ουσιαστικά βρίσκουμε ένα μέσο όρο κάθε γραμμής. Μετά επιλέγουμε το καλύτερο όλων.

$$\text{Γραμμή 1 : } (1/3) * (40 + 45 + 5) = 90/3 = 30$$

$$\text{Γραμμή 2 : } (1/3) * (70 + 30 - 13) = 87/3 = 29$$

$$\text{Γραμμή 3 : } (1/3) * (53 + 45 - 5) = 93/3 = 31$$

$\max \{30, 29, 31\} = \rightarrow$  **Αμοιβαία κεφάλαια (mutual funds)**

## Γενικο Σχόλιο για το συγκεκριμένο πρόβλημα απόφασης

Οι συντηρητικές προσεγγίσεις υποδεικνύουν επένδυση σε **ομόλογα**.

Οι πιο ριψοκίνδυνες προσεγγίσεις (maximax, ελαχιστοποίηση διαφυγόντος κέρδους) υποδεικνύουν επένδυση σε **αμοιβαία κεφάλαια ή μετοχές**.

Τέλος οι πιο ενδιάμεσες προσεγγίσεις που ισορροπούν ανάμεσα σε συντηρητική και επιθετική στρατηγική στη ληψη αποφάσεων (Hurwicz με  $\alpha=0.5$ , κριτήριο Laplace) προτείνουν επίσης **αμοιβαία κεφάλαια ή μετοχές**.

## **Θέμα 2**

Η Mariah Carey θα δώσει συναυλία στις 2 Μαΐου 2018 στα πλαίσια παγκόσμιας περιοδείας της. Τα έσοδα που θα προκύψουν εξαρτώνται από τον καιρό που μπορεί να είναι αίθριος ή βροχερός. Αν ο καιρός είναι αίθριος τα κέρδη θα είναι 1.2 εκ. Ευρώ ενώ αν είναι βροχερός αναμένεται ζημία 2.0 εκ. Ευρώ. Οι υπεύθυνοι της τραγουδίστριας έχουν το δικαίωμα να ακυρώσουν την παράσταση αλλά τότε θα χάσουν την προκαταβολή των 500 χιλ. Ευρώ. Η πιθανότητα βροχής στις αρχές Μαΐου είναι 15% σύμφωνα με ιστορικά δεδομένα. Ποια είναι η βέλτιστη απόφαση από την οπτική γωνία του μάνατζερ της τραγουδίστριας; Φτιάξτε το δέντρο και διατυπώστε τη βέλτιστη λύση. Στη συνέχεια, αν υπάρχει δυνατότητα λήψης εξειδικευμένης πληροφορίας από μετεωρολογική εταιρεία με δορυφόρο και ξέρετε ότι η εταιρεία αυτή προβλέπει σωστά τον αίθριο καιρό σε ποσοστό 95% και τον βροχερό σε ποσοστό 85%, ποια η νέα βέλτιστη στρατηγική για τον μάνατζερ της τραγουδίστριας; Μέχρι πόσα θα ήταν διετεθειμένος να πληρώσει για να έχει την πληροφορία αυτή για τον καιρό; Τέλος, αν θεωρήσετε (α) μια συντηρητική συνάρτηση χρησιμότητας και (β) μια ριψοκίνδυνη συνάρτηση χρησιμότητας, πως πιστεύετε ότι μπορεί να αλλάξουν οι σχετικές αποφάσεις του μάνατζερ; Δώστε απλά τη γνώμη σας και δείξτε σχεδιαστικά τι μορφή περίπου θα έχουν οι συναρτήσεις.

---

***Ποια είναι η βέλτιστη απόφαση από την οπτική γωνία του μάνατζερ της τραγουδίστριας; Φτιάξτε το δέντρο και διατυπώστε τη βέλτιστη λύση.***

Το πρώτο ερώτημα του θέματος λύνεται σχεδιάζοντας το απλό δέντρο απόφασης, βάσει των δεδομένων του προβλήματος.

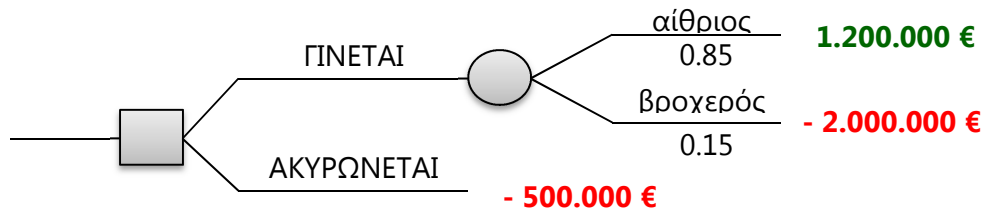
Αρχικά, μας δίνεται ότι:

$$P(\text{βροχής}) = 0,15$$

Άρα:

$$P(\text{αίθριου καιρού}) = 1 - P(\text{βροχής}) = 0,85$$

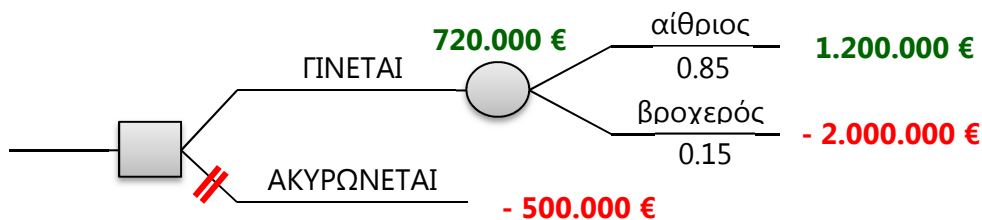
Το δέντρο που πρέπει να σχεδιάσουμε είναι:



Οπότε, για να υπολογίσουμε την αναμενόμενη απόδοση του κόμβου (ΓΙΝΕΤΑΙ), έχουμε:

$$\begin{aligned}
 (\text{ΓΙΝΕΤΑΙ}) &= [(\text{απολαβές αίθριου}) \cdot P(\text{αίθριου καιρού})] + [(\text{απολαβές βροχερού}) \cdot P(\text{βροχής})] \\
 &= [1.200.000 \cdot 0,85] + [-2.000.000 \cdot 0,15] \\
 &= 1.020.000 - 300.000 \\
 &= 720.000
 \end{aligned}$$

Άρα το δέντρο γίνεται:



και προφανώς η βέλτιστη απόφαση του μάνατζερ είναι να γίνει η συναυλία.

### Σωστή απάντηση:

Η βέλτιστη απόφαση του μάνατζερ είναι να μην ακυρώσει τη συναυλία. Αυτή η απόφαση έχει πιθανότητα 85% να αποφέρει κέρδη 1,2 εκ. €, αλλά και ρίσκο 15% να αποφέρει ζημία ύψους 2 εκ. €

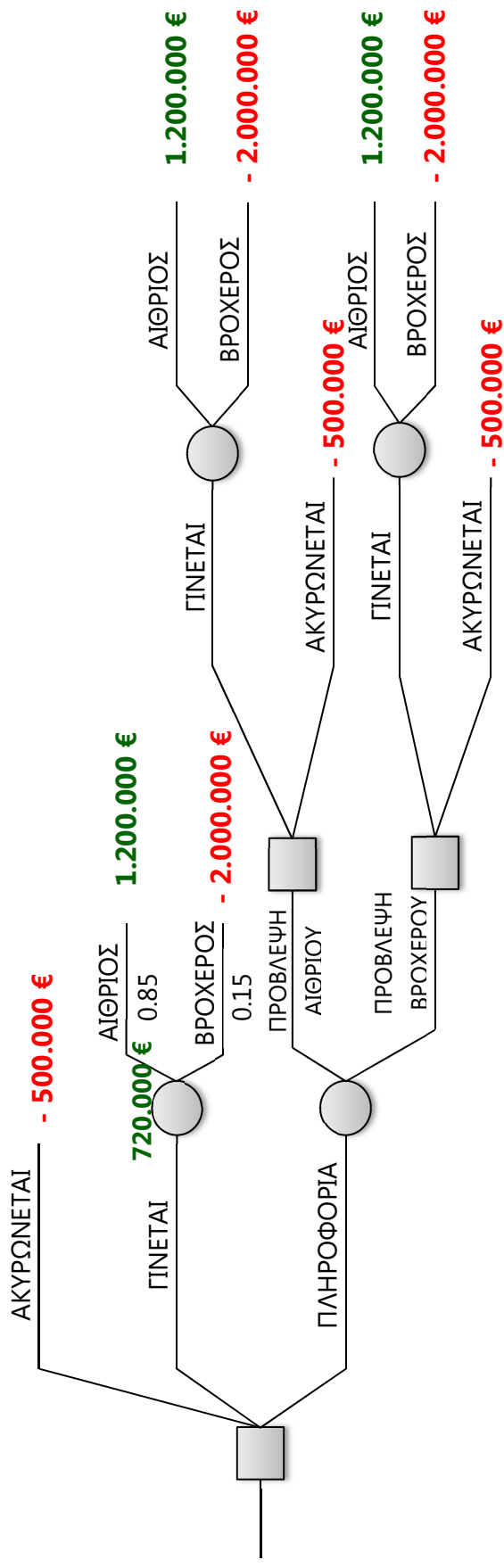
**αν υπάρχει δυνατότητα λήψης εξειδικευμένης πληροφορίας από μετεωρολογική εταιρεία με δορυφόρο και ξέρετε ότι η εταιρεία αυτή προβλέπει σωστά τον αίθριο καιρό σε ποσοστό 95% και τον βροχερό σε ποσοστό 85%, ποια η νέα βέλτιστη στρατηγική για τον μάνατζερ της τραγουδίστριας;**

Από τα δεδομένα του δεύτερου ερωτήματος μπορούμε να εξαγάγουμε τις εξής πιθανότητες:

$$P(\text{πρόβλεψης αίθριου}|\text{αίθριος}) = 0,95 \Rightarrow P(\text{πρόβλεψης βροχερού}|\text{αίθριος}) = 0,05$$

$$P(\text{πρόβλεψης βροχερού}|\text{βροχερός}) = 0,85 \Rightarrow P(\text{πρόβλεψης αίθριου}|\text{βροχερός}) = 0,15$$

Το δέντρο τώρα αποκτάει ένα ακόμη κλαδί στον αρχικό κόμβο απόφασης, αφού υπάρχει η δυνατότητα να πάρουμε μια πληροφορία.



Άρα πρέπει να υπολογίσουμε την πιθανότητα πρόβλεψης αίθριου και την πιθανότητα πρόβλεψης βροχερού καιρού.

**ΠΡΟΣΟΧΗ!!!** Δεν είναι ίδιες με τις αντίστοιχες πιθανότητες σωστής πρόβλεψης καιρικών φαινομένων της μετεωρολογικής εταιρείας.

Εδώ ισχύει η γενικευμένη σχέση:

$$P(\text{πρόβλεψης φαινομένου}) = [P(\text{πρόβλεψη φαινομένου} | \text{φαινόμενο}) \cdot P(\text{φαινόμενο})] + [P(\text{πρόβλεψη φαινομένου} | \text{δεν συνέβει το φαινόμενο}) \cdot P(\text{εναντακτικού φαινομένου})]$$

Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} P(\text{πρόβλεψη αίθριου}) &= \\ & [P(\text{πρόβλεψη αίθριου}|\text{αίθριος}) \cdot P(\text{αίθριος})] + [P(\text{πρόβλεψη αίθριου}|\text{βροχερός}) \cdot P(\text{βροχερού})] \\ &= [0,95 \cdot 0,85] + [0,15 \cdot 0,15] \\ &= 0,8075 + 0,0225 = 0,83 \end{aligned}$$

και άρα:

$$P(\text{πρόβλεψη βροχερού}) = 1 - P(\text{πρόβλεψη αίθριου}) = 1 - 0,83 = 0,17$$

Τώρα πρέπει να υπολογίσουμε και τις δεσμευμένες πιθανότητες των τελικών κλαδιών του δέντρου απόφασης.

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

$$\begin{aligned} P(\text{αίθριος}|\text{προβλέψαμε αίθριο}) &= \frac{P(\text{πρόβλεψη αίθριου}|\text{αίθριος}) \cdot P(\text{αίθριος})}{P(\text{πρόβλεψη αίθριου})} \\ &= \frac{0,95 \cdot 0,85}{0,83} \cong 0,9729 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{αίθριος}|\text{προβλέψαμε βροχερός}) &= \frac{P(\text{πρόβλεψη βροχερός}|\text{αίθριος}) \cdot P(\text{αίθριος})}{P(\text{πρόβλεψη βροχερού})} \\ &= \frac{0,05 \cdot 0,85}{0,17} = 0,25 \end{aligned}$$

Κατ' επέκταση, υπολογίζουμε:

$$P(\text{βροχερός}|\text{προβλέψαμε αίθριο}) = 1 - P(\text{αίθριος}|\text{προβλέψαμε αίθριο}) = 0,0271$$

$$P(\text{βροχερός}|\text{προβλέψαμε βροχερό}) = 1 - P(\text{αίθριος}|\text{προβλέψαμε βροχερός}) = 0,75$$

Και τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τους κόμβους:

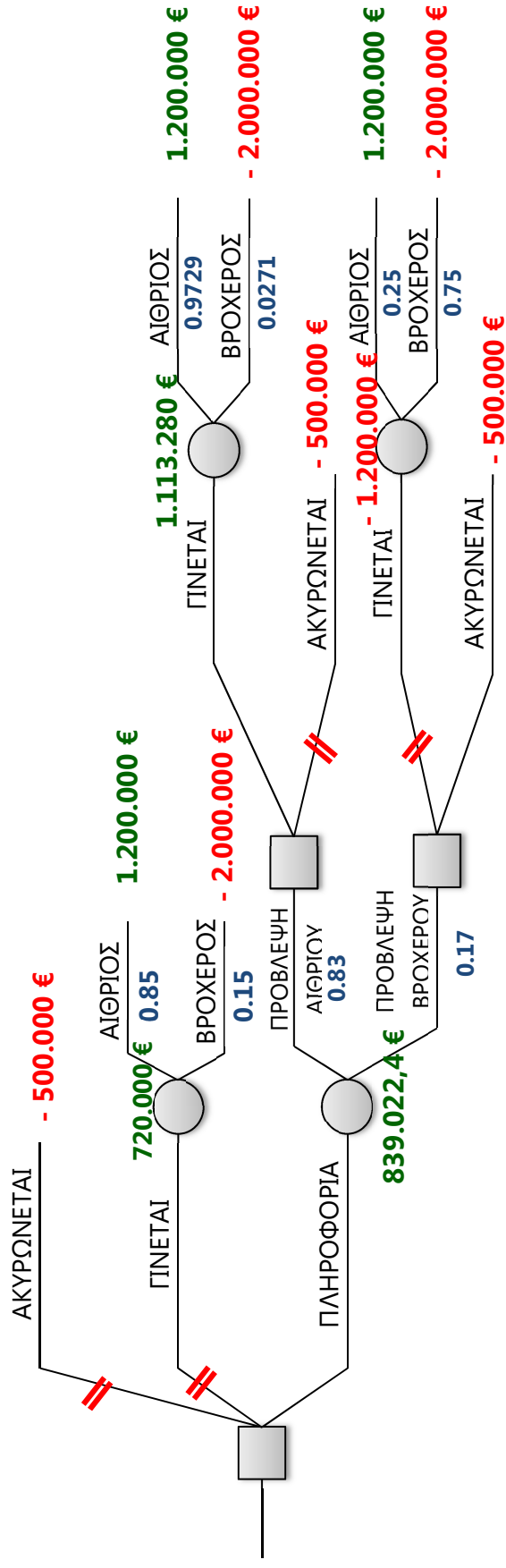
$$\begin{aligned} &(\text{ΓΙΝΕΤΑΙ στην πρόβλεψη αίθριου}) \\ &= [(\text{απολαβές αίθριου}) \cdot P(\text{αίθριος}|\text{προβλέψαμε αίθριο})] \\ &\quad + [(\text{απολαβές βροχερού}) \cdot P(\text{βροχερός}|\text{προβλέψαμε αίθριο})] \\ &= [1.200.000 \cdot 0,9729] + [-2.000.000 \cdot 0,0271] \\ &= 1.167.480 - 54.200 \\ &= 1.113.280 \end{aligned}$$

(ΓΙΝΕΤΑΙ στην πρόβλεψη βροχερού)

$$\begin{aligned}
&= [(\text{απολαβές αίθριου}) \cdot P(\text{αίθριος}|\text{προβλέψαμε βροχερός})] \\
&\quad + [(\text{απολαβές βροχερού}) \cdot P(\text{βροχερός}|\text{προβλέψαμε βροχερό})] \\
&= [1.200.000 \cdot 0,25] + [-2.000.000 \cdot 0,75] \\
&= 300.000 - 1.500.000 = -1.200.000
\end{aligned}$$

(ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑ)

$$\begin{aligned}
&= [(\text{αναμενόμενες απολαβές πρόβλεψης αίθριου}) \cdot P(\text{πρόβλεψης αίθριου})] \\
&\quad + [(\text{αναμενόμενες απολαβές πρόβλεψης βροχερού}) \cdot P(\text{πρόβλεψης βροχερού})] \\
&= [1.113.280 \cdot 0,83] + [-500.000 \cdot 0,17] \\
&= 924.022,4 - 85.000 \\
&= 839.022,4
\end{aligned}$$



**Σωστή απάντηση:**

Η βέλτιστη απόφαση του μανάτζερ είναι να αγοράσει την πληροφορία και η πληροφορία προβλέπει αίθριο καιρό, να κάνει την συναυλία, αλλιώς αν προβλέπει βροχερό καιρό, να την ακυρώσει.



**Μέχρι πόσα θα ήταν διατεθειμένος να πληρώσει για να έχει την πληροφορία αυτή για τον καιρό;**

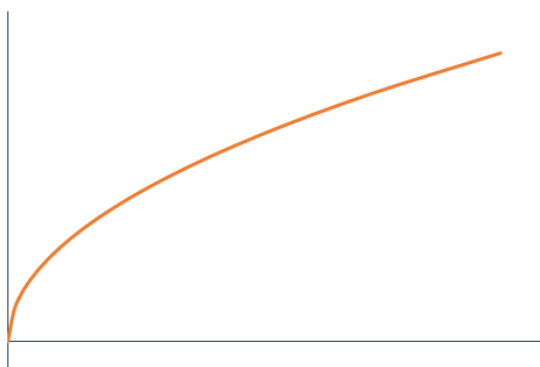
Το ποσό αυτό υπολογίζεται από τη διαφορά των αναμενόμενων αποδόσεων της ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ και του να κάνει τη συναυλία χωρίς να πάρει την πληροφορία (ΓΙΝΕΤΑΙ).

$$\text{ΜΕΓΙΣΤΟ ΠΟΣΟ} = \text{ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑ} - \text{ΓΙΝΕΤΑΙ} = 839.022,4 - 720.000 = 119.022,4 \text{ €}$$

Η διαφορά των δύο επιλογών είναι μικρή, οπότε σε κάθε περίπτωση δεν θα άξιζε να αγοράσει την πληροφορία.

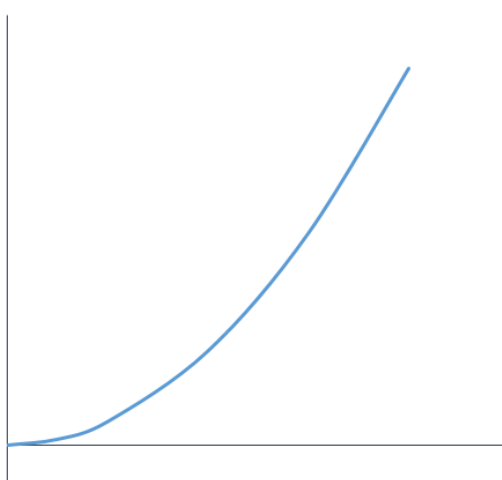
**Τέλος, αν θεωρήσετε (α) μια συντηρητική συνάρτηση χρησιμότητας και (β) μια ριψοκίνδυνη συνάρτηση χρησιμότητας, πως πιστεύετε ότι μπορεί να αλλάξουν οι σχετικές αποφάσεις του μάνατζερ; Δώστε απλά τη γνώμη σας και δείξτε σχεδιαστικά τι μορφή περίπου θα έχουν οι συναρτήσεις.**

**(α) Συντηρητική συνάρτηση χρησιμότητας**



Σε μια συντηρητική συνάρτηση χρησιμότητας, η απόφαση του μάνατζερ θα άλλαζε εφόσον θα είχε μεγάλο ρίσκο. Αν οι πιθανότητες των φαινομένων του καιρού ήταν ανάποδα, ο μάνατζερ θα επέλεγε να μην πάρει το ρίσκο να κάνει τη συναυλία και θα ήταν πολύ διαφορετικό το δέντρο όσων αφορά τις απολαβές πλέον.

**(β) Ριψοκίνδυνη συνάρτηση χρησιμότητας**



Αντιθέτως, σε μια ριψοκίνδυνη συνάρτηση χρησιμότητας, εφόσον οι πιθανότητες των φαινομένων του καιρού ήταν εξίσου ανάποδα, ο μάνατζερ θα επέλεγε να κάνει τη συναυλία παρόλο το υψηλό ρίσκο. Στην περίπτωση αυτή, ο λήπτης απόφασης αναζητά το ρίσκο, καθώς έχει μεγαλύτερη απόδοση.